Antonio Wilson Vieira
Luiz Carlos Gabriel Filho
Narciso da Hora Lisboa
Rosivaldo Antonio Gonçalves
Sebastião Alves de Souza

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA PARA LICENCIATURA

Da Construção dos Números às Funções Reais de Variável Real

Teoria de Conjuntos

Relações

Equivalência

Ordem

Aplicações

Naturais ($\mathbb{N}$)

Inteiros ($\mathbb{Z}$)

Racionais ($\mathbb{Q}$)

Reais ($\mathbb{R}$) & Complexos ($\mathbb{C}$)

Funções reais de variável real ($f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$)

EDITORA UNIMONTES

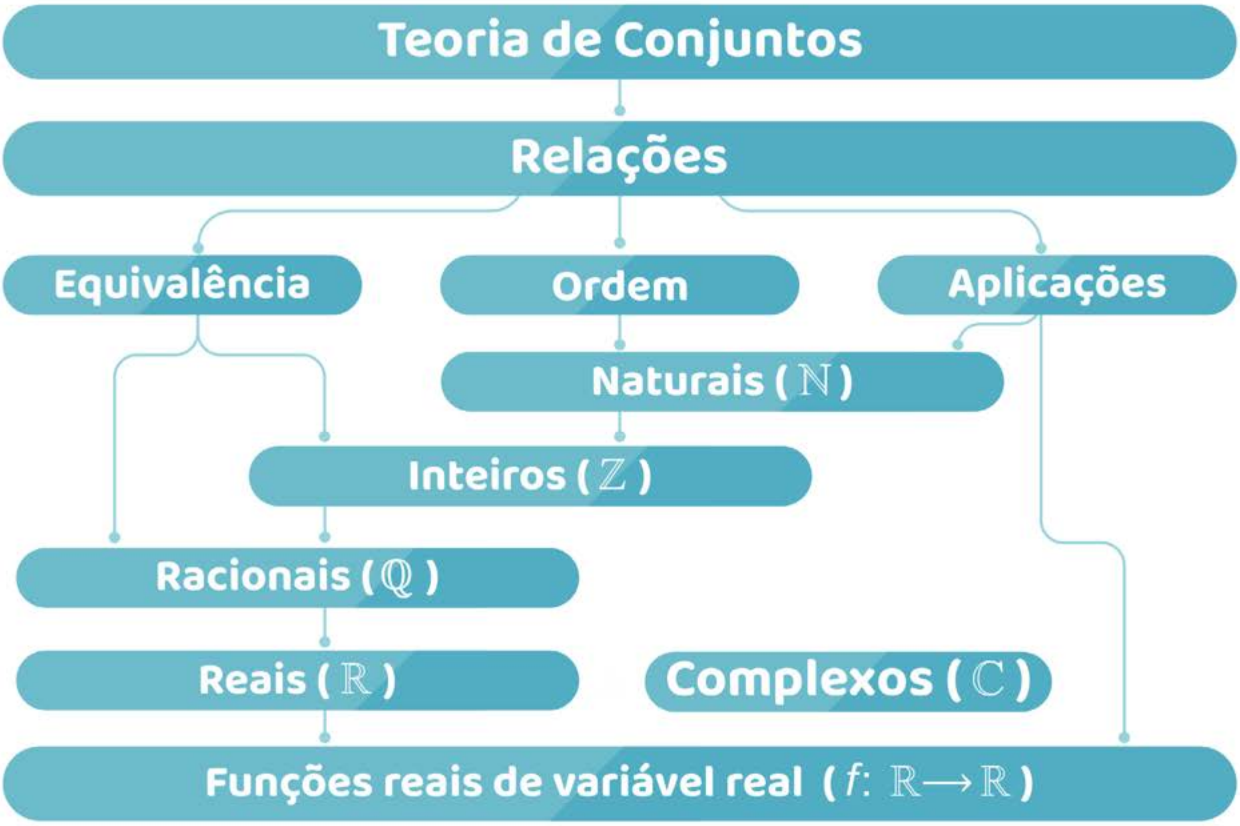
O livro trata de assuntos básicos que são essenciais para Estudantes dos cursos de Licenciatura em Matemática e professores do Ensino Médio. Apresenta propriedades essenciais dos principais conjuntos numéricos, tais como Números Naturais, Inteiros, Racionais, Reais e Complexos, além de conceitos como Relações e Funções Polinomiais, Trigonométricas, Logarítmica, Exponencial e Modular. Os assuntos são apresentados de uma forma didática. O texto é cuidadosamente escrito, com boa dosagem de rigor matemático, sendo também bem diagramado e ilustrado. Contém um número significativo de exemplos e exercícios resolvidos, que são importantíssimos nesse tipo de trabalho. Acredito que todos têm a ganhar com mais esse trabalho colocado à disposição das Universidades, Estudantes e Professores Brasileiros.

Lenimar Nunes de Andrade
Professor Titular da Universidade Federal da Paraíba

Antonio Wilson Vieira
Luiz Carlos Gabriel Filho
Narciso da Hora Lisboa
Rosivaldo Antonio Gonçalves
Sebastião Alves de Souza

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA PARA LICENCIATURA

Da Construção dos Números às Funções Reais de Variável Real



EDITORA Unimontes
Montes Claros
2021

REVISÃO LINGUÍSTICA
Waneuza Soares Eulálio

DIAGRAMAÇÃO / CAPA
Bernardino Mota

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Associação Brasileira das Editoras Universitárias (ABEU)

F981

Fundamentos de Matemática para Licenciatura : da construção dos números às funções reais de variável real[recurso eletrônico] / Antonio Wilson Vieira... [et al.](organizadores).– Montes Claros: Editora Unimontes, 2021.
128p.: il.;23cm. E'book PDF.

Modo de acesso: world wide web
http://www.editora.unimontes.br/index.php/ebook

ISBN: 978-65-86467-13-0

1. Teoria de conjuntos. 2. Relações - Aplicações, Equivalência e Ordem. 3. Números Naturais. 4. Inteiros e Racionais. 5. Números Complexos. 6. Funções Reais de Variável Real.I. Vieira, Antonio Wilson.II.Título.

CDU : 510.22

Elaborado por Neide Maria J. Zaninelli - CRB-9/ 884

EDITORA UNIMONTES
Campus Universitário Professor Darcy Ribeiro
Montes Claros - Minas Gerais - Brasil
CEP: 39.401-089 - CAIXA POSTAL: 126
www.unimontes.br
editora@unimontes.br

Filiada à

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA
DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS

CONTEÚDO

Sobre os Autores

Antônio Wilson Vieira. Graduado em Licenciatura em Matemática pela Unimontes, tem Mestrado em Matemática Aplicada pela PUC-Rio e Doutorado em Ciência da Computação pela UFMG. Atuou na indústria, como programador de computadores e, há 20 anos, atua como professor de educação superior na Unimontes, onde leciona disciplinas de Matemática para formação de professores, bem como atua em cursos relacionados à computação e engenharias, desenvolvendo pesquisas em Modelagem Geométrica e Visão Computacional.

Luiz Carlos Gabriel Filho. Graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes), e Mestrado em Matemática pela Universidade Federal de Viçosa (UFV). Professor do Departamento de Ciências Exatas da Unimontes, e professor da Universidade Federal de Minas Gerais, UFMG - ICA (Campus Montes Claros - MG). Em termos de pesquisa, tem interesse por Algoritmos Evolutivos e Otimização Multiobjetivo.

Narciso da Hora Lisboa. Graduado em Matemática pela Universidade Federal de Viçosa (1995), Mestre em Matemática pela Universidade de Brasília (1998) e Doutor em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (2011). Atualmente, é professor do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes). Sua área de pesquisa são equações diferenciais parciais elípticas.

Rosivaldo Antonio Gonçalves. Graduado em Ciências e possui Licentiatura em Matemática pela Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes); Mestre em Matemática pela UFSCar; Doutor em Matemática pela Vniversidad de Valencia (Spain); Pós-doutor em Matemática (UFMG). Professor de Matemática no Departamento de Ciências Exatas, da Unimontes. Respeitante à investigação científica, tem interesse em resultados voltados para a Análise Geométrica, que se origina da articulação de estudos nas áreas de Equações Diferenciais Parciais, Geometria e Topologia. Atua como Professor e orientador no Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e Sistemas, bem como Coordenador Regional, em Minas Gerais (Polo MG07), da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

(OBMEP) desde 2008; Coordenador Regional da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), a partir de 2016; Coordenador Regional da Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária (OBMU), desde 2017; Coordenador de subprojeto de Matemática do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid), na Unimontes, desde 2012. Tem forte interesse nas questões de formação de professores de Matemática no Brasil.

Sebastião Alves de Souza. Possui graduação em Ciências e Licenciado em Matemática pela Fundação Norte-Mineira de Ensino Superior (1989) e Mestrado em Física e Matemática Aplicada pela Universidade Federal de Itajubá (2008). Atualmente é professor de educação superior da Universidade Estadual de Montes Claros, atuando principalmente nos seguintes temas: equações diferenciais ordinárias, singularidades e campos de direções sobre superfícies em R^4.

Prefácio

O segredo, ademais, não vale o que valem os caminhos que a ele me conduziram. Esses caminhos há que andá-los. (Borges, 1970, p. 21).

A publicação deste livro é fruto de caminhos teórico-analíticos que se cruzaram em torno do ensino da Matemática. Nesses caminhos, embora percorridos por autores diferentes, há alguns pontos em comum, como, por exemplo, o *desejo* de alçar os conhecimentos em Matemática (e de suas áreas conexas) a objeto de ensino e de aprendizagem; a *capacidade* colaborativa dos envolvidos, no projeto de Ensino *"(Re)pensando o Fundamentos da Matemática Para Uma (Re)construção Crítica dos Números"*, da Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes), elaborado e encabeçado pelo Professor Luiz Carlos Gabriel Filho; entre outros pontos. Por mais que este livro apresente à comunidade acadêmica os resultados, não podemos nos esquecer das condições de produção que sustentam a trajetória desses caminhos.

Sendo assim, ressaltamos que este livro resultou de experiências de anos de trabalho (dos autores) e de discussões sobre um livro didático. Essa problematização do livro buscava, por um lado, tematizar conteúdos básicos para quem estava iniciando um curso de Matemática e, por outro lado, ajudar os alunos em questões mais subjetivas, servindo de estímulo a eles para estudar elementos de Matemática Básica com um pouco mais de formalidade e de profundidade em comparação com certas abordagens realizadas nos ensinos fundamental e médio da educação básica. Os textos propostos, nesta obra, têm uma relação direta com a ementa da disciplina *Fundamentos de Matemática*, do curso de Licenciatura em Matemática oferecido pela Unimontes.

O movimento de revisitar os conceitos aprendidos, de questionar os sentidos já estabilizados e refazer os rumos já consolidados é o que nos leva a questionar o que sabemos, a amadurecer a aprendizagem, a obter fluidez com o conhecimento e com a capacidade de expressá-lo. Notadamente, essa capacidade de comunicar de forma consistente sobre um assunto é uma habilidade basilar na formação de professor. Portanto, a proposição desta obra busca ajudar professores e estudantes a fazerem uma trajetória de inscrição em uma linguagem básica, propiciando melhorar a compreensão de conteúdos de Matemática Básica, bem como (re)pensar os conceitos e os resultados anteriormente aprendidos e, provavelmente, desfazer algumas equivocidades comuns nos discursos dos alunos iniciantes no curso de Matemática.

Nessa medida, o objetivo deste livro ultrapassa, em nossa opinião, a exposição textual de conteúdos organizados de uma forma lógica, já que, a partir dele, "tentamos" estender a discussão dos assuntos abordados em cada capítulo, de maneira a tornar cada texto mais próximo de uma conversa escrita com o leitor, sem perder de vista os mesmos rigores científicos abordados em bons livros de Matemática disponíveis na literatura, alguns dos quais fizeram parte da formação dos autores desta obra e que serviram de referências para este trabalho.

Neste ponto, vale uma digressão. Os registros da história antiga, e que põem em evidência a importância da Matemática na vida do ser humano, parecem ter feito, de modo bastante natural, a primeira divisão dela em duas grandes subáreas, a saber, os números e a geometria. E não seria absurdo dizer que ainda persiste esse tipo de classificação, embora hoje os níveis de especificidade de subáreas na Matemática deram origem a várias outras, sendo que essa divisão ainda não se encontra pronta e acabada.

Nesta medida, este livro se constitui das bases que permitem estudar os conjuntos numéricos mais conhecidos e vistos no ensino básico, ou seja, o conjunto dos números naturais, o dos inteiros, o dos racionais, o dos reais e o dos números complexos. Além disso, inclui um capítulo para tratar o estudo de alguns tipos de funções importantes para o cálculo.

As referidas considerações deixam entrever a abordagem relevante e consistente sobre o conhecimento matemático, nesta obra. Sendo assim, cabe-nos sumarizar a temática de cada capítulo, deixando ao leitor um convite, para que ele possa, assim como os autores, trilhar um caminho de leitura profícuo. O primeiro capítulo é dedicado a um breve estudo sobre a teoria dos conjuntos. A quantidade de material sobre esse tema é bastante extensa, mas, nesta obra, foi abordada em quantidade e qualidade suficientes para a proposta da construção dos conjuntos numéricos. Além disso, o texto propicia a introdução de conceitos e de proposições que, naturalmente, são desdobramentos lógicos desses conceitos.

Entendemos que a forma de apresentar os conjuntos propicia ao leitor um primeiro contato com algum nível de precisão sobre o fazer matemático e como seus entes emergem. Premia-se, ainda, a oportunidade de o aluno iniciar experiências com a formalidade de conceitos subjacentes ao desenvolvimento de uma teoria, algo caro para a Matemática e que redunda em 'demonstrações' de proposições (ou afirmações): lemas, teoremas, corolários (consequências imediatas dos teoremas), etc.

O segundo capítulo se dedica ao estudo das correspondências (ou relações), bem como o da caracterização de vários tipos delas. A abordagem teve a preocupação de ser pensada para o objetivo de instalar linguagens para estudar os conjuntos numéricos sobreditos. Ressaltamos que o importante, neste livro, é a elaboração dos textos, que, em geral, preocuparam-se em descer a detalhes na pretensão de ser mais esclarecedor para o desenvolvimento de certa "fluência" com termos que a Matemática faz uso mais frequente, dentre os quais destacamos os termos "aplicações" e "funções".

Do capítulo terceiro ao sétimo, os respectivos autores se dedicam ao estudo da construção dos conjuntos numéricos usuais. Um fato importante a ressaltar é que, em geral, a maioria dos autores de livros didáticos pouco se preocupa com as dificuldades que os alunos têm em relação à formalização dos conceitos de cada um dos conjuntos numéricos. A apresentação desses conteúdos é abordada, em geral, de uma forma bastante resumida, o que pouco ajuda na compreensão da natureza fundante de cada conjunto numérico. A abordagem feita, nesta obra, aponta uma importante contribuição para a formação de professores de Matemática e representa uma novidade de modelo de estudo e de preparação para o exercício da educação, tendo a Matemática como ferramenta de trabalho.

O conceito de número é bastante abstrato e só existe do ponto de vista da narrativa, sendo, portanto, completamente abstrato em si. De fato, os números comumente conhecidos e que permeiam nossa realidade não têm uma materialidade em si mesmos. A título de esclarecimento do que estamos concebendo como fluência, podemos citar o seguinte exemplo: quando dizemos "árvore", imediatamente o nosso cérebro, que já tem uma certa representação de alguma árvore inscrita, remete-nos ao registro da representação gravada, tendo em vista algum situação experimentada; por outra parte, ao dizer 235, o nosso cérebro não realiza a mesma operação mental. E, assim como a palavra “árvore” não é uma árvore em si mesma, a “palavra” 235 não nos remete a nenhum objeto em concreto. Esse nível de abstração produz o reconhecimento de uma lacuna e, também, da necessidade de mudança de paradigma de ensino. Notadamente, essa hiância se mostra como porta para várias possibilidades de expansão de modos de pensar. Dito de outra maneira, ela nos remete ao exercício de identificar o que está para além da linguagem apresentada no campo perceptivo.

Nesse particular, cabe destacar que a experiência de anos de trabalho, nos primeiros períodos dos cursos de graduação e de pós-graduação, que têm Matemática no currículo, tem nos mostrado um grande número de alunos que deixam perceptíveis certos equívocos de compreensão de conceitos e de resultados por eles estabilizados em estudos anteriores. No entanto, não devemos nos preocupar com as fragilidades que os alunos apresentam ao ingressar nos cursos superiores, mas, sim, em como podemos ajudá-los a superar essas fragilidades.

Assim, os textos contemplados, nesta obra, também apontam para outra questão que alcança níveis mais pedagógicos, no sentido de que há uma clara pretensão de ajudar os professores a contemplar em seus planejamentos de ensino uma visada para as questões dos históricos anteriores dos conteúdos trazidos pelos alunos em suas experiências pregressas.

Do ponto de vista de conteúdo, os conjuntos numéricos estão organizados de forma a apresentar os conceitos, as proposições e as suas demonstrações, os exemplos de problemas resolvidos, em um nível de escrita mais detalhada, o que proporciona uma melhor compreensão dos itens citados (com mais detalhes do que, em geral, encontramos nos livros de Matemática dedicados ao ensino superior). Entendemos que, para aqueles que estão iniciando seus estudos, uma maior quantidade reiterada de abordagem do mesmo assunto é fator importante para o processo de construção de aprendizagem, que ultrapassa os mecanismos de fixação momentânea, para alcançar o desenvolvimento de autonomia na aprendizagem.

O oitavo, e último capítulo, está voltado para o estudo de aplicações mais específicas, a saber: os diferentes e mais comuns tipos de funções. Os conteúdos vistos nos capítulos anteriores fundam bases e linguagens adequadas para estudar outras disciplinas de períodos posteriores, por exemplo: teoria dos números, estruturas algébricas, espaços vetoriais, para citar algumas. Nesse oitavo capítulo, o livro se dedica a preparar os alunos para outra parte da estrutura curricular, que entendemos ser a espinha dorsal do curso de Matemática, a saber: o cálculo diferencial e integral. De fato, as funções são o objeto que permeiam todo o interesse no estudo de limites, de derivadas e de integrais, bem como em suas aplicações. Neste particular, os textos desta obra auxiliam fortemente a abordagem do que se vê em livros de pré-cálculo.

É difícil dizer o alcance de um livro, pois esse alcance parece apontar para algo subjetivo, e os benefícios se inscrevem em características de uma experiência individual. Mas, certamente, esta obra apela para uma visada distinta de ser somente um livro. Ela deixa traços que fazem trabalhar reflexões para além da forma conteudista, dando lugar a (re)pensar as práticas pedagógicas no ensino de Matemática e suas outras possibilidades de promover gosto pelas relações com a ciência e com o ensino.

Gostaríamos de registrar os nossos agradecimentos a todos que nos ajudaram a finalizar este trabalho. Jamais o teríamos alcançado sem a colaboração de alunos, de professores, de outros autores. Em particular, agradecemos à Unimontes, à Pró-reitoria de Ensino e ao Departamento de Ciências Exatas. Cabe salientar que esses dois anos e meio de estudo e de dedicação nos fizeram aprender bastante sobre a importância de produzir material didático com qualidade para alcançar melhor a formação dos nossos estudantes da Matemática, que são aqueles que dela fazem uso.

É chegada a hora de deixar o próprio leitor percorrer as páginas desta obra, de modo a trilhar o seu caminho de leitura. Esperamos que o desejo do leitor possa fazer ponto de contato com o nosso desejo em torno do ensino da Matemática, o que poderá resultar em incursões criativas e produtivas a partir da obra em tela.

Os autores.

1. Linguagem de Conjuntos

1.1 Introdução

A Matemática parece estar em tudo. Ao atravessar uma rua, ‘calculamos’ o tempo para não haver acidentes; ao preparar uma comida, temos de medir os ingredientes e o tempo de cozimento; para contar uma história, é necessário organizar e por em uma lógica os fatos, os dados; enfim, é preciso realizar uma sequenciação de dados e de falas. Esses são alguns exemplos da Matemática que é feita de forma intuitiva, que não precisa de caneta nem de papel.

Em seguida, vem a Matemática da escola, que melhora a Matemática que é feita de maneira intuitiva e que repercute na educação para toda a vida. Nela começamos nossos exercícios de abstração, em que problemas concretos são modelados na forma de relações e operações num universo de objetos abstratos, mas cuja solução, nesse universo, responde aos questionamentos do mundo concreto. Não importa se o problema concreto diz respeito a maçãs ou laranjas, os mesmos objetos abstratos permitem uma modelagem do problema de forma que a solução responda ao problema concreto. Aí entra em cena a Matemática, que tem papel importante na educação, haja vista sua contribuição para desenvolver sua primeira e grande função: a organicidade e a logicidade do raciocínio, do qual todos temos certa necessidade de uso, a todo instante. É nessa fase que surgem os desafios de exercitar o poder de generalização e a comunicação dos fatos com precisão, clareza, coerência e coesão. É hora de aprender a usar os registros que envolvem “as coisas” da Matemática.

O primeiro problema é que os objetos matemáticos não têm, em princípio, certa materialidade que nos permita (re)conhecê-los usando os cinco sentidos do corpo humano (paladar, olfato, tato, visão, audição). Ou seja, o objeto de Matemática, ainda que construído para resolver problemas concretos, é puramente abstrato.

Dado o caráter abstrato e o necessário poder de generalização, cada objeto da Matemática tem de ser precisamente caracterizado. Um desafio para essa caracterização é que a definição de um objeto deve conter apenas termos e referências a objetos previamente definidos. Nesse sentido, dizer por exemplo que “um ponto é a interseção de duas retas” e que “uma reta é um conjunto de pontos alinhados” não define precisamente nem *ponto* nem *reta*, pois a definição de ponto depende da definição de reta que, por sua vez, depende da definição de ponto.

Então, como no caso de *reta* e *ponto*, nem sempre é possível fazer referência a objetos previamente definidos para se caracterizar um novo objeto. Assim, alguns objetos e relações não são definidos, mas considerados *entes primitivos*, aceitos a princípio e, a partir deles, todo um conjunto de objetos de uma teoria podem ser precisamente definidos. Por exemplo, a partir dos conceitos primitivos de ponto, reta e plano, todos os objetos e relações da geometria euclidiana podem ser bem definidos.

Na linguagem de conjuntos, uma série de objetos, relações e operações são precisamente definidas, sempre com referências a termos e objetos previamente definidos. Mas o conceito de *conjunto* é primitivo, aceito sem uma definição formal. A partir desse conceito primitivo, são definidos precisamente outros objetos, relações e operações que, além da sua influência no desenvolvimento da lógica, têm impacto em todos os ramos da Matemática, sendo a principal linguagem que permite conectar as diversas áreas, como álgebra, análise, geometria e topologia.

Como veremos, a teoria desenvolvida neste Capítulo fundará a base de uma linguagem imprescindível para o desenvolvimento dos demais Capítulos, onde os conjuntos numéricos serão formalmente construídos.

1.2 Conjuntos

O conceito de conjunto que empregaremos usa o conceito de objeto. A ideia de objeto é importante por estar relacionada à objetividade, que se contrapõe à subjetividade, na qual cada sujeito percebe a realidade segundo seu ponto de vista. Então, consideramos objeto algo que existe fisicamente, ou no campo das ideias, e cujas características podem ser reconhecidas e comunicadas entre diferentes sujeitos, sem ambiguidades.

Usaremos, geralmente, letras minúsculas, como x, y, z, para indicar objetos, e adotaremos símbolos para expressar relações entre objetos. Para a relação de igualdade entre objetos, por exemplo, usamos o símbolo $=$, e escrevemos $x = y$ para dizer que os objetos x e y são *iguais*, que podem ser considerados como sendo o mesmo objeto. Sobre a igualdade, vamos admitir primitivamente as seguintes propriedades:

1. Qualquer que seja o objeto x, vale $x = x$, ou seja, todo objeto é igual a ele mesmo;

2. Se objetos x e y são tais que $x = y$, então vale também $y = x$, ou seja, se um objeto é igual a um outro, então esse outro é igual ao primeiro;

3. Se objetos x, y e z são tais que $x = y$ e $y = z$, então vale $x = z$, ou seja, se dois objetos são iguais a um terceiro, então eles são iguais entre si.

As propriedades 1, 2 e 3, que nesse caso envolve a igualdade entre objetos, serão vistas em detalhes no Capítulo 2 e são chamadas de reflexiva, simétrica e transitiva, respectivamente.

Se dois objetos não são iguais, eles se dizem *diferentes*. O símbolo $\neq$ será usado para indicar essa relação. A relação de diferença é simétrica, mas não é reflexiva nem transitiva.

A partir do conceito de objeto, chamaremos de *conjunto* todo agrupamento ou coleção de objetos. Esse conceito é *primitivo*, no sentido de que não é definido, mas admitido no sentido usual do termo. Cada objeto em um conjunto será chamado de elemento do conjunto. A notação que usaremos para relações e operações sobre conjuntos segue conforme [1], [2] e [3].

Usaremos, geralmente, letras maiúsculas, como A, B e C, para indicar os conjuntos e, para indicar que um objeto x é elemento de um conjunto A, escrevemos $x \in A$, que deve ser lido como *x pertence a A*. Essa relação, estabelecida também de forma *primitiva*, chama-se relação de *pertinência* entre elementos e conjuntos. Para indicar que um objeto x não é elemento de um conjunto A, escrevemos $x \notin A$, que deve ser lido como *x não pertence a A*.

Um conjunto está determinado ou definido quando se conhece quais são seus elementos. A determinação de um conjunto se pode dar por *extensão* ou por *compreensão*:

a) Um conjunto está determinado por *extensão* quando se enumera todos os seus elementos. Escreve-se entre duas chaves todos os elementos, separados por vírgulas. Por exemplo, se o conjunto A é formado pelos elementos a, e, i, o e u, escrevemos

$$A = \{a, e, i, o, u\}.$$

b) Um conjunto está determinado por *compreensão* quando se dá uma propriedade que é satisfeita por todos os seus elementos, e unicamente por eles. Escreve-se entre duas chaves a propriedade que caracteriza os elementos. Por exemplo, se B é o conjunto de todos os meses do ano, escrevemos

$$B = \{x \text{ tal que } x \text{ é um mês do ano}\}.$$

Uma vez bem determinado, um conjunto pode ter uma representação gráfica, como por *Diagrama de Venn*, onde os conjuntos são representados por uma região do plano limitada por uma curva regular fechada. Os elementos são designados por pontos situados na região delimitada pela curva. Nessa representação, o conjunto $A = \{a, e, i, o, u\}$, pode ser representado conforme Figura 1.1.

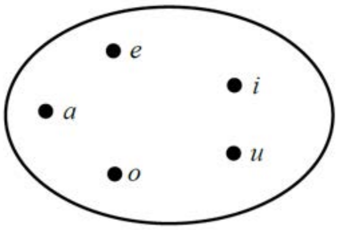


Figura 1.1: *Representação de um conjunto por Diagrama de Venn*

Admite-se a existência de um "conjunto sem elementos", chamado *conjunto vazio*, que pode ser obtido por uma propriedade contraditória ou absurda, não satisfeita por nenhum objeto. Por exemplo, se A é o conjunto dos meses do ano que tem 40 dias, tal conjunto existe e é vazio. Denotamos por $\emptyset$ o conjunto vazio.

Nas seções seguintes, usaremos uma linguagem mais direta, baseada em proposições, funções proposicionais e conectivos lógicos [4]. Chamamos *função proposicional* com domínio no conjunto A toda função $P : A \to \{V, F\}$, onde V e F são valores lógicos que significam Verdadeiro e Falso, respectivamente. Indicamos por $\neg P(x)$ a negação de $P(x)$. Assim, se $P(x) = V$ temos $\neg P(x) = F$ e, se $P(x) = F$ temos $\neg P(x) = V$.

Exemplo 1.1 Seja A o conjunto dos meses do ano e $P : A \to \{V, F\}$ dada por $P(x) = V$ se, e somente se, o mês x tem 30 dias. Nesse caso, temos $P(abril) = V$ e $P(maio) = F$. Com essa notação, definimos os conjuntos:

a) $X = \{x \in A \text{ tal que } P(x)\} = \{\text{abril, junho, setembro, novembro}\}$;

b) $Y = \{x \in A \text{ tal que } \neg P(x)\} = \{\text{janeiro, fevereiro, março, maio, julho, agosto, outubro, dezembro}\}$;

c) $Z = \{x \in A \text{ tal que } P(x) \ e \ \neg P(x)\} = \emptyset$.

Note que, no exemplo (c), o conjunto Z é definido por uma propriedade contraditória, dos meses que têm 30 dias e, ao mesmo tempo, não têm 30 dias. Esse conjunto existe, e é vazio.

Considere funções proposicionais P e Q, com mesmo domínio A. Se para todo $x \in A$ tal que $P(x) = V$ vale também $Q(x) = V$, dizemos que $P(x)$ implica $Q(x)$ e escrevemos

$$P(x) \Rightarrow Q(x).$$

Se para todo $x \in A$ vale $P(x) \Rightarrow Q(x)$ e também vale $Q(x) \Rightarrow P(x)$, dizemos que $P(x)$ e $Q(x)$ são *equivalentes* e escrevemos

$$P(x) \Leftrightarrow Q(x).$$

Utilizaremos frequentemente os símbolos $\forall$ (para todo) e $\exists$ (existe), que são conhecidos como quantificador universal e quantificador existencial, respectivamente. Os símbolos $|$ ou ; serão usados para indicar a conjunção *tal que*. O símbolo : será usado para indicar a expressão *se verifica*.

Exemplo 1.2 Os exemplos abaixo ilustram o uso desses símbolos:

a) A expressão *"**Para todo** elemento x do conjunto A **existe** um elemento y no conjunto B **tal que** x é menor que y"*, em símbolos, fica

$$\forall\, x \in A, \exists\, y \in B;\; x < y.$$

b) A expressão *"É vazio o conjunto dos elementos x de A **tais que** $P(x) = V$ se, e somente se, **para todo** elemento x de A **se verifica** $P(x) = F$"*, em símbolos, fica

$$\{x \in A; P(x) = V\} = \emptyset \Leftrightarrow \forall\, x \in A : P(x) = F$$

Nota 1.1 Neste capítulo, faremos referência aos números *naturais, inteiros, racionais* e *reais* sem entrar em detalhes sobre suas propriedades. Essas propriedades serão estudadas em detalhes nos capítulos subsequentes. Em particular, usamos conceitos de número par e número ímpar, cuja apresentação será dada na Definição 4.5.

1.3 Igualdade e Inclusão de Conjuntos

Os conceitos de elemento, igualdade, conjunto e relação de pertinência foram considerados de forma primitiva, sem uma definição formal. A partir desta seção, os novos objetos, relações e operações serão apresentados de maneira formal, por meio de uma *definição*.

A partir das definições, serão enunciadas *proposições*, que são afirmações cuja veracidade pode ser deduzida a partir das definições e fatos previamente estabelecidos. Assim, cada proposição requer uma *demonstração*, que trata de explicar de que forma os fatos prévios podem ser encadeados para garantir a veracidade da afirmação proposta. Sobre demonstrações, recomendamos a leitura de [5] e [3].

Inicialmente, apresentaremos as relações de inclusão e igualdade entre conjuntos para, então, apresentar as primeiras proposições.

Definição 1.1 Considere A e B dois conjuntos. Diz-se que A é um subconjunto de B, ou que A está contido em B, ou ainda que A é parte de B, e se denota por $A \subset B$, se, e somente se, para todo elemento de A se verifica que ele é também um elemento de B. Essa relação é chamada *inclusão*. Em linguagem de símbolos se escreverá

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall\, x \in A : x \in B.$$

Caso contrário, dizemos que A não está contido no conjunto B ou que A não é um subconjunto B, e escrevemos $A \not\subset B$. Em linguagem de símbolos se escreverá

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists\, x \in A; x \notin B.$$

Exemplo 1.3 Vejamos alguns exemplos de inclusão:

a) Se $A = \{a, b\}$ e $B = \{a, b, c\}$, então $A \subset B$, pois, para todo elemento $x \in A$, se verifica $x \in B$. Por outro lado, $B \not\subset A$, pois, existe $c \in B$ tal que $c \notin A$;

b) Se A é o conjunto dos quadrados e B é o conjunto dos retângulos, então $A \subset B$, pois todo quadrado é um retângulo. Por outro lado, $B \not\subset A$, pois existem retângulos que não são quadrados.

A igualdade entre conjuntos será definida a partir da verificação de que eles têm os mesmos elementos. Isso é feito usando a definição de inclusão.

Definição 1.2 Dois conjuntos A e B são iguais, e escrevemos $A = B$, se todos os elemento de A estão em B e todos os elementos de B estão em A, ou seja, $A \subset B$ e $B \subset A$. Se ocorrer $A \not\subset B$ ou $B \not\subset A$, dizemos que A é diferente de B, e escrevemos $A \neq B$.

Exemplo 1.4 Vejamos alguns exemplos de igualdade entre conjuntos:

a) Se $A = \{x \in \mathbb{R}; x^3 = x\}$ e $B = \{-1, 0, 1\}$, então $A = B$, pois $A \subset B$ e $B \subset A$;

b) Se A é o conjunto dos triângulos equiláteros e B é o conjunto dos triângulos equiângulos, então $A = B$, pois todo triângulo equilátero é equiângulo, e vice-versa.

Proposição 1.1 O conjunto vazio $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto A, ou seja, $\emptyset \subset A$, para todo A.

Demonstração: Suponha que, para algum conjunto A, $\emptyset \not\subset A$. Isso significa, por definição, que existe um elemento x tal que $x \in \emptyset$ e $x \notin A$. Mas é absurdo supor que existe algum x tal que $x \in \emptyset$. Então, supor que $\emptyset \not\subset A$ leva a um absurdo e, portanto, deve-se se aceitar que $\emptyset \subset A$.

Como base na proposição anterior, podemos concluir que o conjunto vazio é único. De fato, suponha que X e Y sejam conjuntos vazios. Sendo X vazio, vale $X \subset Y$ e, sendo Y vazio, vale $Y \subset X$. Como $X \subset Y$ e $Y \subset X$, temos que $X = Y$.

Nota 1.2 A quantidade de elementos de um conjunto recebe o nome de *Cadinalidade*. No Capítulo 3, depois de introduzir formalmente o conjunto $\mathbb{N}$, será discutido em detalhes os conceitos de cardialidade, bem como conceitos de conjunto finito e infinito.

A relação de inclusão entre conjuntos admite propriedades que a torna uma relação de ordem parcial, conforme definiremos na Seção 2.10. Essas propriedades são mostradas na proposição seguinte.

Proposição 1.2 A relação de inclusão admite as seguinte propriedades:

i) Para todo conjunto A, vale $A \subset A$ (Reflexividade);
ii) Dados conjuntos A e B, se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$ (Antissimetria);
iii) Dados conjuntos A, B e C, se $A \subset B$ e $B \subset C$, então vale $A \subset C$ (Transitividade).

Demonstração:

i) $\forall\, x \in A : x \in A$, então, por definição, $A \subset A$.
ii) Se $A \subset B$ e $B \subset A$, temos, por definição, que $A = B$.
iii) Dado $x \in A$, como $A \subset B$, vale $x \in B$. Por sua vez, como $B \subset C$, vale $x \in C$. Portanto, temos que $A \subset C$.

Deve-se observar que os elementos de um conjunto são objetos de qualquer natureza. Em particular, entre os elementos de um conjunto podem haver outros conjuntos. Nesse caso, tanto relações de pertinência como inclusão podem ser estabelecidas.

Exemplo 1.5 Considere $A = \{0,2\}$, $B = \{1,2\}$ e $C = \{0,1,2,3,\{0,2\}\}$. Então, temos as relações:

a) $A \in C$ e $A \subset C$;
b) $B \notin C$ e $B \subset C$.

Definição 1.3 Seja A um conjunto dado. O conjunto formado pelos subconjuntos de A chama-se *conjunto das partes de* A, indicado por $\wp(A) = \{B \mid B \subset A\}$.

Exemplo 1.6 Alguns exemplos de conjuntos e suas partes:

a) Se $A = \{a,b\}$, o conjunto das partes de A é dado por

$$\wp(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}.$$

b) Se $B = \{1,2,3\}$, o conjunto das partes de B é dado por

$$\wp(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

1.4 Operações entre Conjuntos

Nesta seção, definimos as operações de união, interseção e diferença entre conjuntos. Essas operações e suas propriedades tornam a linguagem de conjuntos elemento essencial da linguagem matemática.

Definição 1.4 Sejam A e B dois conjuntos arbitrários. Definimos:

a) Chama-se *união* de A e B ao conjunto $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

b) Chama-se *interseção* de A e B ao conjunto $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

c) Chama-se *diferença* de A e de B ao conjunto $A - B = \{x \in A \mid x \notin B\} = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

Usando diagramas de Venn, as operações de união, interseção e diferença podem ser representadas conforme regiões destacadas em cinza na Figura 1.2.

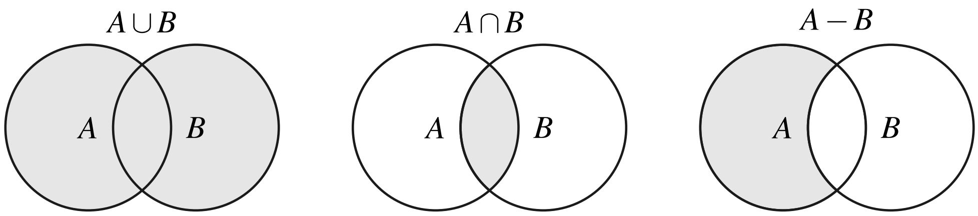


Figura 1.2: *Ilustração para operações entre conjuntos usando diagramas de Venn.*

Exemplo 1.7 Dados os conjuntos $A = \{1,3,5\}$ e $B = \{2,3,4\}$, temos:

a) $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$;
b) $A \cap B = \{3\}$;
c) $A - B = \{1,5\}$;
d) $B - A = \{2,4\}$.

As operações de união, interseção e diferença entre conjuntos satisfazem algumas propriedades conforme enunciado nas proposições seguintes.

Proposição 1.3 Dados os conjuntos A, B e C, são válidas as seguintes propriedades:

a) $A \cup \emptyset = A$;

b) $A \cup A = A$ (Idempotência);

c) $A \cup B = B \cup A$ (Comutatividade);

d) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Associatividade);

e) $(A \cup B) \cap A = A$ (Propriedade simplificativa);

f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributividade).

Demonstração: Para mostrar que as igualdades se verificam, precisamos mostrar que se verificam as inclusões nos dois sentidos.

a) Devemos mostrar que $A \cup \emptyset \subset A$ e que $A \subset A \cup \emptyset$.
   (i) Dado $x \in A \cup \emptyset$, temos por definição que $x \in A$ ou $x \in \emptyset$. Como não existe x tal que $x \in \emptyset$, concluímos que $x \in A$. Portanto, $A \cup \emptyset \subset A$;
   (ii) Dado $x \in A$, temos que $x \in A \cup B$, qualquer que seja o conjunto B. Em particular, se $x \in A$ vale $x \in A \cup \emptyset$. Portanto, $A \subset A \cup \emptyset$.
   Por (i) e (ii), concluímos que $A \cup \emptyset = A$.

b) Devemos mostrar que $A \cup A \subset A$ e que $A \subset A \cup A$.
   (i) Dado $x \in A \cup A$, temos que $x \in A$ ou $x \in A$. De qualquer sorte, $x \in A$. Portanto, $A \cup A \subset A$;
   (ii) Dado $x \in A$, temos que $x \in A \cup B$, qualquer que seja o conjunto B. Em particular, se $x \in A$ vale $x \in A \cup A$. Portanto, $A \subset A \cup A$.
   Por (i) e (ii), concluímos que $A \cup A = A$.

c) Devemos mostrar que $A \cup B \subset B \cup A$ e que $B \cup A \subset A \cup B$.
   (i) Dado $x \in A \cup B$, temos que $x \in A$ ou $x \in B$, que pode ser escrito como $x \in B$ ou $x \in A$. Logo, $x \in B \cup A$ e, consequentemente, $A \cup B \subset B \cup A$.
   (ii) Analogamente, se $x \in B \cup A$, temos que $x \in A \cup B$. Portanto, $B \cup A \subset A \cup B$.
   Por (i) e (ii), concluímos que $A \cup B = B \cup A$.

d) Exercício.
e) Exercício.

f) Devemos mostrar que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.

   (i) Dado $x \in A \cup (B \cap C)$, temos que $x \in A$ ou $x \in B \cap C$. Se for $x \in A$, então vale $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$, donde $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Se for $x \in B \cap C$, temos que $x \in B$ e $x \in C$, donde $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$, ou seja, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. De qualquer sorte, temos $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e, portanto, $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

   (ii) Dado $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, temos que $x \in (A \cup B)$ e $x \in (A \cup C)$. Temos duas possibilidades, $x \in A$ ou $x \notin A$. Se for $x \in A$, então $x \in A \cup (B \cap C)$. Se for $x \notin A$, como $x \in (A \cup B)$ e $x \in (A \cup C)$, vale $x \in B$ e $x \in C$, ou seja, $x \in (B \cap C)$, donde $x \in A \cup (B \cap C)$. Portanto, $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.
   Por (i) e (ii), temos que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Proposição 1.4 Dados os conjuntos A, B e C, são válidas as seguintes propriedades:

a) $A \cap \emptyset = \emptyset$;

b) $A \cap A = A$ (Idempotência);

c) $A \cap B = B \cap A$ (Comutatividade);

d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Associatividade);

e) $(A \cap B) \cup A = A$ (Propriedade simplificativa);

f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributividade).

Demonstração: Exercício.

A proposição seguinte estabelece formas equivalentes de dizer que um conjunto A é subconjunto de um conjunto B.

Proposição 1.5 Sejam A e B conjuntos quaisquer. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $A \subset B$;
(b) $A \cup B = B$;
(c) $A \cap B = A$;
(d) $A - B = \emptyset$.

Demonstração: Mostremos que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.

$(a) \Rightarrow (b)$ Seja $x \in A \cup B$. Então, $x \in A$ ou $x \in B$. Como $A \subset B$, concluímos que $x \in B$. Logo, $A \cup B \subset B$. Sempre é certo que $B \subset A \cup B$. Portanto, a igualdade se verifica.

$(b) \Rightarrow (c)$ Segue da propriedade simplificativa e da comutatividade da interseção. Com efeito, $A \cup B = B$ implica que $A \cap B = A \cap (A \cup B) = A$.

$(c) \Rightarrow (d)$ Suponhamos que $A - B \neq \emptyset$. Assim, existe x pertencente a $A - B$. Consequentemente, $x \in A = A \cap B$. Isso implica que $x \in B$. Absurdo, pois $x \in A - B$.

$(d) \Rightarrow (a)$ Seja $x \in A$. Como $A - B = \emptyset$, concluímos que $x \notin A - B$. Isso implica que $x \in B$, já que $x \in A$ e $x \notin A - B$.

A demonstração da Proposição 1.5 usa uma estratégia de *implicação circular*, que permite estabelecer a implicação entre quaisquer dos itens. Por exemplo, temos que $(c) \Rightarrow (b)$, pois $(c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a) \Rightarrow (b)$.

Proposição 1.6 Sejam A, B e C conjuntos arbitrários. Então, valem as seguintes propriedades operatórias envolvendo união, interseção e diferença:

a) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$;

b) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$;

Demonstração: Basta comprovar, em cada caso, que a inclusão se verifica em ambos os sentidos.

a) Devemos mostrar que $A-(B\cup C)\subset(A-B)\cap(A-C)$ e que $(A-B)\cap(A-C)\subset A-(B\cup C)$.

(i) Dado $x\in A-(B\cup C)$, então $x\in A$ e $x\notin B\cup C$, ou seja, $x\notin B$ e $x\notin C$. De $x\in A$ e $x\notin B$, temos $x\in(A-B)$ e, de $x\in A$ e $x\notin C$, temos $x\in(A-C)$. Então, temos que $x\in(A-B)\cap(A-C)$. Portanto, $A-(B\cup C)\subset(A-B)\cap(A-C)$;

(ii) Seja agora $x\in(A-B)\cap(A-C)$. Isso implica que $x\in(A-B)$ e $x\notin C$. De $x\in(A-B)$ vem que $x\in A$ e $x\notin B$. Assim, $x\in A$ e $x\notin B\cup C$. Logo, $x\in A-(B\cup C)$. Portanto, $(A-B)\cap(A-C)\subset A-(B\cup C)$.

Por (i) e (ii), concluímos que $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$.

b) Devemos mostrar que $A-(B\cap C)\subset(A-B)\cup(A-C)$ e que $(A-B)\cup(A-C)\subset A-(B\cap C)$.

(i) Dado $x\in A-(B\cap C)$, então $x\in A$ e $x\notin B\cap C$. De $x\notin B\cap C$, temos $x\notin B$ ou $x\notin C$. Se for $x\notin B$, teremos $x\in(A-B)$ e, se for $x\notin C$, teremos $x\in(A-C)$. Então, temos que $x\in(A-B)$ ou $x\in(A-C)$, ou seja, $x\in(A-B)\cup(A-C)$ e, portanto, $A-(B\cap C)\subset(A-B)\cup(A-C)$;

(ii) Dado $x\in(A-B)\cup(A-C)$, temos que $x\in(A-B)$ ou $x\in(A-C)$. Se for $x\in(A-B)$, então $x\in A$ e $x\notin B$, ou seja, $x\in A$ e $x\notin B\cap C$, donde $x\in A-(B\cap C)$. Se for $x\in(A-C)$, então $x\in A$ e $x\notin C$, ou seja, $x\in A$ e $x\notin B\cap C$, donde $x\in A-(B\cap C)$. De qualquer sorte, temos $x\in A-(B\cap C)$ e, portanto, $(A-B)\cup(A-C)\subset A-(B\cap C)$.

Por (i) e (ii), concluímos que $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

Definição 1.5 Considere A um conjunto qualquer e $B\subset A$. Chama-se *complementar* de B (em A) ao conjunto $\complement_A^B=A-B$.

Exemplo 1.8 Alguns exemplos:

(a) Se $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ e $B=\{1,3,5\}$, temos que $\complement_A^B=\{2,4,6,7\}$;

(b) Se $A=\mathbb{N}$ e $B=\{x\in\mathbb{N}\mid x \text{ é par}\}$, então $\complement_A^B=\{x\in\mathbb{N}\mid x \text{ é ímpar}\}$;

(c) Se $A=\mathbb{Q}$ e $B=\{x\in\mathbb{Q};\ x^2>2\}$, então $\complement_A^B=\{x\in\mathbb{Q}\mid x^2<2\}$.

No caso do exemplo (c), acima, não precisamos usar a desigualdade $x^2\leq 2$, pois, como veremos no Capítulo 6, não existe $x\in\mathbb{Q}$ tal que $x^2=2$.

Proposição 1.7 Considere A um conjunto e seja $B\subset A$. Então valem as igualdades:

a) $B\cup\complement_A^B=A$;

b) $B\cap\complement_A^B=\emptyset$.

Demonstração: Mostremos que, em cada caso, as inclusões se verificam em ambos os sentidos.

a) Mostremos que $B\cup\complement_A^B\subset A$ e que $A\subset B\cup\complement_A^B$.

(i) Dado $x\in B\cup\complement_A^B$, temos que $x\in B$ ou $x\in(A-B)$. Se $x\in B$, como $B\subset A$, vale $x\in A$ e, se $x\in(A-B)$, também vale $x\in A$. Então, de qualquer sorte, temos $x\in A$. Portanto,

$B \cup \complement_A^B \subset A$.

(ii) Dado $x \in A$, vale uma das possibilidades: $x \in B$ ou $x \notin B$. Isso implica que $x \in B$ ou $x \in (A - B)$, ou seja, $x \in B \cup \complement_A^B$. Portanto, $A \subset B \cup \complement_A^B$;

Por (i) e (ii), temos que $B \cup \complement_A^B = A$.

b) Exercício.

Proposição 1.8 (Leis de De Morgan) Se A é um conjunto arbitrário e $X, Y \subset A$, então

a) $\complement_A^{X \cup Y} = \complement_A^X \cap \complement_A^Y$;

b) $\complement_A^{X \cap Y} = \complement_A^X \cup \complement_A^Y$.

Demonstração: Decorre imediatamente da Proposição 1.6.

Quando se se considera um conjunto universo U, que contém todos os conjuntos em um contexto, usamos A^c para indicar o complementar de A em relação a U. Nesse caso, $A^c = \complement_U^A$. Usando essa notação, decorre imediatamente das proposições anteriores que:

a) $A \cup A^c = U$;
b) $A \cap A^c = \emptyset$;
c) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;
d) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

1.5 Produto Cartesiano

Definição 1.6 Chama-se *par ordenado* ao ente matemático formado por dois tipos de objetos matemáticos dados em uma ordem determinada. Simboliza-se (a,b), em que a e b se denominam primeira e segunda componentes do par (a,b).

Dizemos que dois pares ordenados são iguais se, e somente se, as componentes correspondentes são iguais entre si, é dizer,

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d.$$

Dessa condição se deduz que

$$(a,b) = (b,a) \Leftrightarrow a = b.$$

Definição 1.7 Sejam A e B dois conjuntos. Chama-se *produto cartesiano* de A e B ao conjunto

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Exemplo 1.9 Se $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{a,b\}$, então

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}.$$

O produto cartesiano de A e B pode ser obtido usando a tabela abaixo.

A/B	a	b
1	$(1,a)$	$(1,b)$
2	$(2,a)$	$(2,b)$
3	$(3,a)$	$(3,b)$

Se $A = \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e $B = \mathbb{R}$, então $A \times B$ é o conjunto de todos os pares ordenados cuja primeira componente (ou coordenada) é um número natural e cuja segunda componente (ou coordenada) é um número real.

Proposição 1.9 Sejam A, B, C e D conjuntos. Então,

a) $A \times B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$;
b) $A \times B = C \times D \neq \emptyset \Leftrightarrow A = C$ e $B = D$;
c) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ e $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$;
d) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ e $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$;
e) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ e $(B - C) \times A = (B \times A) - (C \times A)$.

Demonstração:

a) $A \times B \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists\ (a,b) \in A \times B \Leftrightarrow \exists\ a \in A$ e $\exists\ b \in B \Leftrightarrow A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$.

b) $(\Leftarrow)$ Trivial.
$(\Rightarrow)$ Seja $(a,b) \in A \times B = C \times D$. Isso implica que $a \in A$, $a \in C$, $b \in B$ e $b \in D$. Então,

$$x \in A \Leftrightarrow (x,b) \in A \times B \Leftrightarrow (x,b) \in C \times D \Leftrightarrow x \in C.$$

Logo, $A = C$ e, analogamente, $B = D$.

c) Se $(a,b) \in A \times (B \cup C)$, então $a \in A$ e $b \in B \cup C$. De $b \in B \cup C$ vem que $b \in B$ ou $b \in C$.
Se $b \in B$, então $(a,b) \in A \times B$. Daí, $(a,b) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.
Se $b \in C$, então $(a,b) \in A \times C$. Isso implica que $(a,b) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.
Assim, $A \times (B \cup C) \subset (A \times B) \cup (A \times C)$.
Se $(a,b) \in (A \times B) \cup (A \times C)$, então $(a,b) \in A \times B$ ou $(a,b) \in A \times C$.
Se $(a,b) \in A \times B$, então $a \in A$ e $b \in B$. Isso implica que $a \in A$ e $b \in B \cup C$ e, consequentemente, $(a,b) \in A \times (B \cup C)$. De modo análogo, se $(a,b) \in A \times C$, obtemos $(a,b) \in A \times (B \cup C)$.
Assim, $(A \times B) \cup (A \times C) \subset A \times (B \cup C)$.
Da dupla inclusão se deduz a igualdade. De igual forma se procede para demonstrar que $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$.

d) É similar ao item c).

e) É similar aos dois itens anteriores.

2. Correspondências e Relações

2.1 Introdução

A ideia de relação está presente sempre que associamos elementos de dois conjuntos segundo alguma propriedade. Por exemplo, se tomamos P como conjunto de países e A como conjunto de animais, podemos estabelecer pares (x,y) de animais x que ocorrem nos países y. Nesse caso, temos os pares ordenados (canguru,Austrália) $\in A \times P$ e também $(canguru, Brasil) \in A \times P$, já que ambos os pares estão no produto cartesiano. Entretanto, o par (canguru,Austrália) faz sentido já que o animal canguru ocorre na Austrália, mas o par $(canguru, Brasil)$ não faz sentido, já que o animal canguru não ocorre no Brasil. Aos pares que fazem sentido, segundo uma propriedade dada, chamamos correspondências e o conjunto de pares correspondentes chamamos de *relação*. Entre os tipos de relações possíveis, estudaremos as aplicações, equivalências e ordens.

Quando tomamos, por exemplo, um conjunto A de pessoas e um conjunto B de idades, a correspondência entre pessoas e idades determina uma relação onde cada pessoa está associada a uma, e apenas uma idade. Então não é possível ter (Carlos, 15) e (Carlos, 21) na relação, pois Carlos só pode ter uma idade. Esse tipo de relação é denominada *aplicação*.

Tomando agora o conjunto a A de pessoas, a correspondência entre pessoas que tem mesma idade determina uma relação que agrupa pessoas que têm a mesma idade. Então, se o par (Carlos, João) está na relação, significa que eles têm a mesma idade. Esse tipo de relação é denominada relação de *equivalência*.

Finalmente, tomando o mesmo conjunto A de pessoas, podemos tomar pares ordenados de pessoas cuja ordem segue a ordem das idades, por exemplo. Assim, se a correspondência (Pedro, Antônio) está na relação, significa que Pedro é mais novo, ou tem mesma idade, que Antônio. Esse tipo de relação é denominada relação de *ordem*.

O conjunto de pares que satisfazem a uma determinada propriedade é dito relação, e cada par da relação é uma correspondência. Os conceitos de ordem e aplicação serão importantes na construção dos números naturais no Capítulo 3. Já o conceito de relação de equivalência será usado na construção dos números inteiros e racionais, nos capítulos 4 e 5, respectivamente. Finalmente, a partir da construção dos números reais, no Capítulo 6, o conceito de aplicação será usado na definição das funções reais de variável real no Capítulo 8.

2.2 Correspondências

Definição 2.1 Sejam A e B conjuntos. Chama-se *relação* entre A e B a qualquer subconjunto f de $A \times B$.

Exemplo 2.1 Dados $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{3,4\}$, temos que o produto cartesiano $A \times B$ é dado por

$$A \times B = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}.$$

a) O conjunto $f = \{(1,3),(2,4),(3,4)\}$ é uma relação de A em B, pois temos $f \subset A \times B$;
b) Naturalmente que $\emptyset$ é uma relação de A em B, pois $\emptyset \subset A \times B$;
c) Também o próprio produto cartesiano, $A \times B$, é uma relação, pois $A \times B \subset A \times B$.

Definição 2.2 Sejam A, B, C conjuntos e considere $f \subset A \times B$ e $g \subset B \times C$. Chama-se:

i) domínio de f o conjunto $\text{dom}(f) = \{x \in A; \exists y \in B \text{ com } (x,y) \in f\}$;
ii) imagem de f o conjunto $\text{Im}(f) = \{y \in B; \exists x \in A \text{ com } (x,y) \in f\}$;
iii) relação inversa de f o conjunto $f^{-1} = \{(y,x) \in B \times A; (x,y) \in f\}$;
iv) composição de f e g a relação $g \circ f = \{(x,z) \in A \times C; \exists y \in B \text{ com } (x,y) \in f, (y,z) \in g\}$;
v) O conjunto B é chamado contradomínio de f.

Exemplo 2.2 Sejam $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4,7\}$ e $C = \{7,8\}$. Então,

$$A \times B = \{(1,3),(1,4),(1,7),(2,3),(2,4),(2,7)\}$$

e

$$B \times C = \{(3,7),(3,8),(4,7),(4,8),(7,7),(7,8)\}.$$

Considerando $f = \{(1,3),(1,4),(2,3)\}$ e $g = \{(3,7),(4,8)\}$, temos:

a) $dom(f) = \{1,2\}$ e $dom(g) = \{3,4\}$.
b) $Im(f) = \{3,4\}$ e $Im(g) = \{7,8\}$. Note que $Im(f) \subset dom(g)$.
c) $g \circ f = \{(1,7),(1,8),(2,7)\}$.

As definições apresentadas em cada item permitem fazer algum exercício de demonstrar propriedades que as articulam, e é disso que trata a seguinte proposição.

Proposição 2.1 As seguintes propriedades se verificam:

a) $\text{dom}(f^{-1}) = \text{Im}(f)$ e $\text{Im}(f^{-1}) = \text{dom}(f)$
b) $(f^{-1})^{-1} = f$
c) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
d) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (associatividade)

Demonstração:

a) Sendo $f \subset A \times B$, temos $f^{-1} \subset B \times A$, donde

$$\begin{aligned} dom(f^{-1}) &= \{y \in B | \exists x \in A \; com \; (y,x) \in f^{-1}\} \\ &= \{y \in B | \exists x \in A \; com \; (x,y) \in f\} \\ &= Im(f) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Im(f^{-1}) &= \{x \in A | \exists y \in B \; com \; (y,x) \in f^{-1}\} \\ &= \{x \in A | \exists y \in A \; com \; (x,y) \in f\} \\ &= dom(f). \end{aligned}$$

b) Sendo $f \subset A \times B$, temos $f^{-1} \subset B \times A$, segue-se que

$$\begin{aligned} (f^{-1})^{-1} &= \{(x,y) \in A \times B | (y,x) \in f^{-1}\} \\ &= \{(x,y) \in A \times B | (x,y) \in f\} \\ &= f. \end{aligned}$$

c) Sendo $f \subset A \times B$, e $g \subset B \times C$, temos $g \circ f \subset A \times C$, donde

$$\begin{aligned} (g \circ f)^{-1} &= \{(z,x) \in C \times A | (x,z) \in g \circ f\} \\ &= \{(z,x) \in C \times A | \exists y \in B \; com \; (x,y) \in f, (y,z) \in g\} \\ &= \{(z,x) \in C \times A | \exists y \in B \; com \; (z,y) \in g^{-1} \; e \; (y,x) \in f^{-1}\} \\ &= f^{-1} \circ g^{-1}. \end{aligned}$$

d) Sejam A, B, C e D conjuntos e $f \subset A \times B$, $g \subset B \times C$, $h \subset C \times D$. Temos $h \circ g \subset B \times D$ e $g \circ f \subset A \times C$. Então,

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f) &= \{(x,k) \in A \times D | \exists z \in C \; com \; (x,z) \in g \circ f, (z,k) \in h\} \\ &= \{(x,k) \in A \times D | \exists y \in B \; e \; \exists z \in C \; com \; (x,y) \in f, (y,z) \in g, (z,k) \in h\} \\ &= \{(x,k) \in A \times D | \exists y \in B \; com \; (x,y) \in f, (y,k) \in h \circ g\} \\ &= (h \circ g) \circ f. \end{aligned}$$

2.3 Aplicações ou Funções

Nesta seção, estudamos as aplicações entre dois conjuntos. Os termos aplicação ou função serão usados de forma indistinta neste texto, sendo o termo função mais usual no caso de aplicação entre conjuntos numéricos. No Capítulo 8, as funções e suas propriedades estabelecidas aqui serão usadas para estudar as funções reais de variável real. A Definição 2.3 estabelece alguns conceitos sobre relações que serão úteis na discussão sobre aplicações.

Definição 2.3 Considere $f \subset A \times B$ uma relação. Dizemos que

a) f é unívoca quando, para todo $x \in A$, se $(x,y) \in f$ e $(x,z) \in f$, se tem $y = z$.
b) f é biunívoca se f e f^{-1} são unívocas.
c) f é injetiva se f^{-1} é unívoca.
d) f é sobrejetiva se $\mathrm{Im}(f) = B$.
e) f é bijetiva se f é injetiva e sobrejetiva, simultaneamente.

O conceito de aplicação deve ser visto como uma relação entre dois conjuntos que cumpre determinadas condições. Portanto, não se pode perder de vista que uma aplicação, ou função, é um conjunto de pares ordenados que cumprem determinadas condições. A Definição 2.4 estabelece essas condições.

Definição 2.4 Uma relação $f \subset A \times B$ diz-se uma *aplicação* se:

i) f é unívoca;
ii) $\operatorname{dom}(f) = A$.

Nota 2.1

1) Para indicar que $f \subset A \times B$ é uma aplicação de A em B, usaremos a notação $f : A \to B$.
2) Se $(x, y) \in f$ dizemos que y é a imagem de x pela f e denotamos esta imagem por $y = f(x)$. Frequentemente, com certo abuso de linguagem acerca do símbolo $f(x)$, dizemos "f de x", mas devemos ter em conta que se trata da imagem de x pela f e, portanto, de um elemento do contradomínio de f.
3) $f \neq f(x)$. De fato, f denota a relação e, portanto, f é uma notação para o subconjunto de pares ordenados que constituem a relação. Por outra parte, $f(x)$ é o valor que f assume ao aplicar a regra f sobre o domínio, a qual ensina como associar um elemento $x \in \operatorname{dom}(f)$ a um elemento $f(x)$ de B.

Proposição 2.2 Considere $f : A \to B$ uma aplicação de A em B. Então, f é injetiva se, para quaiquer $x, x' \in A$, com $f(x) = f(x')$, se tem $x = x'$ (dito de outro modo, f é injetiva quando, para quaisquer $x, x' \in A$, com $x \neq x'$, se verifica que $f(x) \neq f(x')$).

Demonstração: Suponha $f : A \to B$ injetiva. Se, para $x, x' \in A$, vale $f(x) = f(x')$, então existe $y \in B$ tal que $y = f(x) = f(x')$, ou seja, $(x, y), (x', y) \in f$. Isso implica que $(y, x), (y, x') \in f^{-1}$. Como f é injetiva, f^{-1} é unívoca, donde $x = x'$.

2.4 Aplicação Composta

A Definição 2.2 estabelece o conceito de composição entre relações. Então, duas aplicações também admitem composição, por serem relações. A Proposição 2.3 estabelece as propriedades da composição entre duas aplicações.

Proposição 2.3 Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ aplicações. Temos:

a) $g \circ f$ é aplicação.
b) Se f e g são injetivas, então $g \circ f$ é injetiva.
c) Se f e g são sobrejetivas, então $g \circ f$ é sobrejetiva.
d) Se f e g são bijetivas, então $g \circ f$ é bijetiva.

Demonstração:

a) i) Considere $x \in A$. Então, existe $y \in B$ de modo que $(x, y) \in f$, porque f é uma aplicação.
Dado $y \in B$, existe $z \in C$ de modo que $(y, z) \in g$, porque g é uma aplicação. Então se verifica que $(x, z) \in g \circ f$. Isso implica que $x \in \operatorname{dom}(g \circ f)$. Portanto, $\operatorname{dom}(g \circ f) = A$.

ii) Considere $x \in A$ e sejam $z, z' \in C$, com $(x, z), (x, z') \in g \circ f \subset A \times C$. Isso implica que existem $y, y' \in B$, com $(x, y), (x, y') \in f$ e $(y, z), (y', z') \in g$. Como $(x, y), (x, y') \in f$ e f é uma aplicação, concluímos que $y = y'$. Então, $(y, z), (y, z') \in g$ e, sendo g uma aplicação, deduzimos que $z = z'$. Assim, pois, $g \circ f$ é unívoca.

Sendo $g \circ f$ unívoca e dom($g \circ f$) = A, $g \circ f$ é aplicação.

b) Considere $x, x' \in A$ de modo que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Sendo $(g \circ f)$(x) = $(g \circ f)$(x'), concluímos que $g(f(x)) = g(f(x'))$. Mas g é injetiva, logo $f(x) = f(x')$ e, por f ser injetiva, $x = x'$.

c) Seja $z \in C$. Sabemos que C é o contradomínio de g. Como g é sobrejetiva, existe algum elemento do domínio de g, que é B, digamos $y \in B$, tal que $g(y) = z$.
Mas B é o contradomínio de f, e f é sobrejetiva. Logo, existe algum elemento do domínio de f, que é A, digamos $x \in A$, de modo que $f(x) = y$. Assim, temos $z = g(y)$ e $y = f(x)$, donde z = g($f(x)$) = $(g \circ f)$(x). Portanto, $g \circ f$ é sobrejetiva.

d) Consequência imediata de b) e c).

2.5 Aplicação Inversa

Diferentemente da composição entre aplicações que sempre resulta em uma aplicação, a inversa de uma aplicação é uma relação que pode ou não ser aplicação.

Definição 2.5 Dizemos que $f : A \to B$ é uma aplicação inversível quando a relação inversa $f^{-1} : B \to A$ é uma aplicação.

A Proposição 2.4 estabelece condições para que f^{-1} seja uma aplicação.

Proposição 2.4 Seja $f : A \to B$ uma aplicação. Então, a relação inversa $f^{-1} : B \to A$ é uma aplicação se, e somente se, f é bijetiva.

Demonstração: Considere a aplicação $f : A \to B$ e a relação inversa $f^{-1} : B \to A$. Então, f é bijetiva $\Leftrightarrow$ f é injetiva e f é sobrejetiva $\Leftrightarrow$ f^{-1} é unívoca e $\mathrm{Im}(f) = B \Leftrightarrow f^{-1}$ é unívoca e dom(f^{-1}) = $B \Leftrightarrow f^{-1}$ é aplicação.

Definição 2.6 A aplicação $i_A : A \to A$ tal que $i_A(x) = x$, para todo $x \in A$, diz-se aplicação identidade de A.

Definição 2.7 Considere uma aplicação $f : A \to B$.

i) Dizemos que $g : B \to A$ é uma aplicação inversa à esquerda de f se $g \circ f = i_A$, ou seja, $g(f(x)) = x$, para todo $x \in A$.
ii) Dizemos que $g : B \to A$ é uma aplicação inversa à direita de f se $f \circ g = i_B$, ou seja, $f(g(y)) = y$, para todo $y \in B$.

Proposição 2.5 Seja a aplicação $f : A \to B$.

i) f possui inversa à esquerda se, e somente se, f é injetiva.
ii) f possui inversa à direita se, e somente se, f é sobrejetiva.
iii) f é inversível se, e somente se, possui inversas à direita e à esquerda.

Demonstração:

i) Exercício.
ii) Exercício.
iii) f possui inversa à direita e à esquerda $\Leftrightarrow$ f é injetiva e sobrejetiva $\Leftrightarrow$ f é bijetiva $\Leftrightarrow$ f^{-1} é uma aplicação $\Leftrightarrow$ f é inversível.

Exemplo 2.3 Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, com $f(x)=x^3$. Então $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, com $g(x)=\sqrt[3]{x}$, é uma inversa à esquerda de f, pois $g(f(x))=g(x^3)=\sqrt[3]{x^3}=x$. Além disso, g é uma inversa à direita de f, pois $f(g(x))=f(\sqrt[3]{x})=(\sqrt[3]{x})^3=x$. Sendo g inversa à direta e à esquerda de f, temos que f é inversível e g é, simplesmente, inversa de f.

Exemplo 2.4 Seja $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, com $f(x)=x^2$. Então $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ com $g(x)=\sqrt{|x|}$ é uma inversa à esquerda de f, pois $g(f(x))=g(x^2)=\sqrt{|x^2|}=x$. Mas g não é uma inversa à direita de f. De fato, por exemplo, $f(g(-1))=f(\sqrt{|-1|})=f(1)=1\neq -1$. Observe que f não terá nenhuma inversa à direita, pois f não é sobrejetiva.

2.6 Relações Sobre um Conjunto

Nesta seção, vamos considerar o fato de que uma relação R, ao cumprir algumas propriedades, faz com que possamos classificar todos os elementos do conjunto em que R está definida, sobretudo, por propriedades que agrupam, ou formam subconjuntos do domínio de R, com a particularidade de que tais subconjuntos sejam disjuntos e a união deles é o domínio de R. É, portanto, uma ferramenta bastante útil em todas as subáreas da Matemática. Cada subconjunto assim formada será chamado de classe de equivalência, e dir-se-á que R é uma relação de equivalência.

Algumas relações preservam estruturas topológicas ou algébricas (os chamados morfismos), ou propriedades puramente geométricas. Um fato importante é que essas relações de equivalência vão exercer papel fundamental na definição de novos objetos matemáticos, sendo especial a atenção a esse tema a fim de dar uma boa noção de conceitos importantes, como os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, vetores, etc.

Definição 2.8 Quando R é uma relação de A em B e $A=B$, temos $R\subset A\times A$ e dizemos que R é uma relação sobre A. Para denotar que x,y estão R relacionados, escrevemos xRy, é dizer, o par $(x,y)\in R$.

Aqui vale uma digressão. Em geral, alguns autores tratam as relações de A em B, como relações binárias. Outros, por sua vez, preferem o termo relações binárias, quando $A=B$. Não entraremos nessa discussão, deixando ao gosto do leitor essa decisão.

Definição 2.9 Considerando uma relação R sobre A, diremos que

i) R é *reflexiva* quando, para todo $x\in A$, tem-se $(x,x)\in R$. Ou seja, o par (x,x) está na relação R, para todo $x\in A$.
ii) R é *antirreflexiva* quando não existe $x\in A$ tal que xRx.
iii) R é *simétrica* quando, para quaisquer $x,y\in A$, com $(x,y)\in R$, então $(y,x)\in R$. Ou seja, o par (y,x) está na relação R sempre que (x,y) também esteja.
iv) R é *transitiva* quando, para quaisquer $x,y,z\in A$, com $(x,y)\in R$ e $(y,z)\in R$, então $(x,z)\in R$. Ou seja, o par (x,z) está na relação R sempre que, para algum $y\in A$, os pares (x,y) e (y,z) estejam.
v) R é *antissimétrica* quando, para quaisquer $x,y\in A$, se $(x,y)\in R$ e $(y,x)\in R$, então $x=y$. Ou seja, os elementos x e y são iguais sempre que $(x,y)\in R$ e $(y,x)\in R$.
vi) R é *circular* quando, para quaisquer $x,y,z\in A$, se $(x,y)\in R$ e $(y,z)\in R$, então $(z,x)\in R$. Ou seja, o par (z,x) está na relação R sempre que, para algum $y\in A$, os pares (x,y) e (y,z) estejam.
vii) R é *conexa* quando, para quaisquer $x,y\in A$, se verifica que $(x,y)\in R$ ou $(y,x)\in R$.

Proposição 2.6 Seja A um conjunto e R uma relação sobre A. Cumpre-se que:

a) se R é reflexiva, então R não é antirreflexiva;
b) se R é reflexiva e circular, então R é simétrica;
c) sendo R simétrica e antissimétrica, se se verifica que, para quaisquer $x,y \in A$, com $(x,y) \in R$, então $x = y$;
d) sendo R simétrica, transitiva e, para todo $x \in A$, existe $y \in A$, com $(x,y) \in R$, então R é reflexiva;
e) se R é simétrica e transitiva, então R é circular;
f) se R é conexa, então R é reflexiva.

Demonstração:

a) Trivial;
b) Sejam $x,y \in A$, com xRy. Pela propriedade reflexiva segue que xRx e, aplicando a propriedade circular ao fato que xRx e xRy, temos yRx. Logo, R é simétrica;
c) Sejam $x,y \in A$, com xRy. Então yRx, pela propriedade simétrica. Aplicando a propriedade antissimétrica ao fato xRy e yRx, segue-se que $x = y$;
d) Seja $x \in A$ tal que existe $y \in A$, com xRy. Então yRx, pela propriedade simétrica. Aplicando a propriedade transitiva em xRy e yRx, segue-se que xRx;
e) Para quaisquer $x,y,z \in A$, com xRy, yRz, temos xRz, por ser R transitiva. Por causa da simetria, segue-se que zRx. Portanto, R é circular;
f) Para todo $x \in A$, se verifica que $x,x \in A$. Isso implica que xRx ou xRx. Portanto, xRx.

Exemplo 2.5 A relação R de paralelismo sobre o conjunto A das retas do espaço euclidiano, definida como $(r,s) \in R$ se, e somente se, $r \parallel s$, é reflexiva. De fato, para todo $r \in A$, temos $r \parallel r$.

Exemplo 2.6 A relação R de perpendicularidade sobre o conjunto A das retas do espaço euclidiano, definida como $(r,s) \in R$ se, e somente se, $r \perp s$ é simétrica. De fato, sempre que $r \perp s$, temos $s \perp r$.

Exemplo 2.7 A relação R de desigualdade sobre o conjunto dos números naturais, definida como $(x,y) \in R$ se, e somente se, $x \leq y$ é transitiva. De fato, sempre que $x \leq y$ e $y \leq z$, temos $x \leq z$.

Exemplo 2.8 A relação R de desigualdade sobre o conjunto dos números naturais, definida como $(x,y) \in R$ se, e somente se, $x \leq y$ é antissimétrica. De fato, sempre que $x \leq y$ e $y \leq x$, temos $x = y$.

Exemplo 2.9 Seja $A = \{a,b,c\}$. Temos:

- $R = \{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a),(b,c)\}$ não é reflexiva, pois $c \in A$, mas $(c,c) \notin R$. Também R não é simétrica, pois $(b,c) \in R$, mas $(c,b) \notin R$. Também R não é transitiva, pois temos $(a,b),(b,c) \in R$, mas $(a,c) \notin R$. Também R não é antissimétrica, pois $(a,b),(b,a) \in R$, mas $a \neq b$.
- $S = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

Nota 2.2 Dada uma relação $R \subset A \times A$, usaremos a notação aRb para indicar que a se relaciona com b segundo R, ou seja, $aRb \Leftrightarrow (a,b) \in R$. Caso contrário, indicamos por $a\not{R}b$ para dizer que $(a,b) \notin R$.

Nota 2.3 Dada uma relação $R \subset A \times A$, a representação por *Diagrama de Flechas* associa a cada elemento $(a,b) \in R$ uma flecha de a para b e, a cada elemento $(a,a) \in R$ um laço. Quando $(a,b),(b,a) \in R$, as relações são indicadas numa mesma flecha com pontas duplas. Por exemplo, a relação

$$R = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,c),(c,a),(c,d),(d,d)\}$$

é representada pelo diagrama de flechas da Figura 2.1.

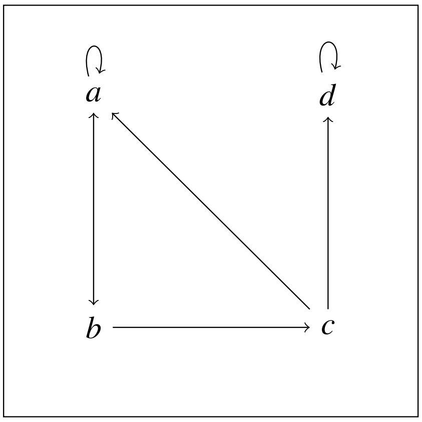


Figura 2.1: *Representação por diagrama de flechas*

2.7 Relações de Equivalência

Definição 2.10 Dizemos que uma relação R sobre um conjunto não vazio E é uma *relação de equivalência* sobre E se, e somente se, R atender às propriedades:

- $\forall x \in E$, $(x,x) \in R$; (reflexiva)
- $\forall x,y \in E$, se $(x,y) \in R$, então $(y,x) \in R$; (simétrica)
- $\forall x,y,z \in E$, se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$, então $(x,z) \in R$. (transitiva)

Exemplo 2.10 A relação R de paralelismo sobre o conjunto E das retas do espaço euclidiano, definida como rRs se, e somente se, $r \parallel s$, é de equivalência. De fato:

i) $\forall r \in E$, temos $r \parallel r$; (reflexiva)
ii) $\forall r,s \in E$, temos que $r \parallel s \Rightarrow s \parallel r$; (simétrica)
iii) $\forall r,s,t \in E$, se $r \parallel s$ e $s \parallel t$, então $r \parallel t$. (transitiva)

Exemplo 2.11 A relação R sobre o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $(a,b)R(c,d)$ se, e somente se, $a+d = c+b$ é de equivalência. De fato:

i) $(a,b)R(a,b)$, pois $a+b = a+b$. (reflexiva)
ii) Se $(a,b)R(c,d)$ temos que $a+d = c+b$, ou $c+b = a+d$. Então, $(c,d)R(a,b)$. (simétrica)
iii) Se $(a,b)R(c,d)$ e $(c,d)R(e,f)$, então $a+d = c+b$ e $c+f = e+d$. Somando membro a membro, temos $(a+d)+(c+f) = (c+b)+(e+d)$. Por associatividade e comutatividade, temos $(a+f)+(c+d) = (e+b)+(c+d)$. Como vale a *Lei do Corte* em $\mathbb{N}$, temos $a+f = e+b$ e, portanto, $(a,b)R(e,f)$. (transitiva)

Exemplo 2.12 A relação S sobre o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tal que $(a,b)S(c,d)$ se, e somente se, $ad = bc$ é de equivalência. De fato:

i) $\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, temos $(a,b)S(a,b)$, pois $ab = ba$. (reflexiva)
ii) $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, temos:

$$(a,b)S(c,d) \Rightarrow ad = bc \Rightarrow bc = ad \Rightarrow cb = da \Rightarrow (c,d)S(a,b). \text{ (simétrica)}$$

iii) $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, se $(a,b)S(c,d)$ e $(c,d)S(e,f)$, então $ad = bc$ e $cf = de$, donde $adf = bcf$ e $bcf = bde$. Isso implica que $adf = bde$. Como $d \neq 0$, temos $af = be$ e, portanto, $(a,b)S(e,f)$. (transitiva)

Proposição 2.7 Uma relação R sobre E é de equivalência se, e somente se, é reflexiva e circular.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Supondo R de equivalência, mostremos que é reflexiva e circular.

i) Sendo R de equivalência, R é reflexiva por hipótese;
ii) Se $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$, mostremos que $(c,a) \in R$. De fato, pela simetria, temos $(c,b) \in R$ e $(b,a) \in R$ e, pela transitividade, temos $(c,a) \in R$. Portanto, R é circular.

$(\Leftarrow)$ Supondo R reflexiva e circular, mostremos que R é de equivalência.

i) Sendo R reflexiva e circular, R é reflexiva por hipótese;
ii) Se $(a,b) \in R$, temos $(a,a) \in R$ e $(a,b) \in R$, pois R é reflexiva. Donde $(b,a) \in R$, pois R é circular. Portanto, R é simétrica;
iii) Se $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$ temos, por simetria, que $(c,b) \in R$ e $(b,a) \in R$. Como R é circular, temos $(a,c) \in R$. Portanto, R é transitiva.

2.8 Classes de Equivalência

Definição 2.11 Dada uma relação de equivalência R sobre E e um elemento $a \in E$, chamamos *classe de equivalência*, módulo R, o conjunto $\overline{a} \subset E$ dado por

$$\overline{a} = \{x \in E; xRa\}. \tag{2.1}$$

Exemplo 2.13 A relação R sobre o conjunto $E = \{a,b,c,d,e,f\}$, dada por $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,c),(c,a),(a,d),(d,a),(c,d),(d,c),(e,f),(f,e)\}$, é uma relação de equivalência. Assim, temos as classes:

$\overline{a} = \{a,c,d\}$.
$\overline{b} = \{b\}$.
$\overline{c} = \{a,c,d\}$.
$\overline{d} = \{a,c,d\}$.
$\overline{e} = \{e,f\}$.
$\overline{f} = \{e,f\}$.

Note que $\overline{a} = \overline{c} = \overline{d}$. Também $\overline{e} = \overline{f}$. Usando diagrama de flechas, a relação acima é representada conforme Figura 2.2.

Exemplo 2.14 Vimos que a relação S sobre o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ dada por $(a,b)S(c,d)$ se, e somente se, $ad = bc$ é de equivalência. Então, temos

$$\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; ay = bx\}. \tag{2.2}$$

Em particular, temos

$$\overline{(2,3)} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; 2y = 3x\}. \tag{2.3}$$

Veremos no Capítulo 5 que, por exemplo, o número racional $\dfrac{2}{3}$ é definido como a classe de equivalência $\overline{(2,3)} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; 2y = 3x\}$.

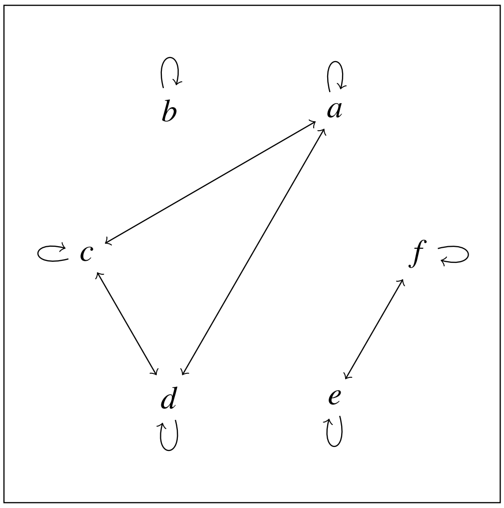


Figura 2.2: *Diagrama de flechas de uma relação de equivalência.*

Proposição 2.8 Considere uma relação de equivalência $R \subset E \times E$. Se $a, b \in E$, então vale: aRb se, e somente se, $\overline{a} = \overline{b}$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponhamos que aRb e mostremos que $\overline{a} = \overline{b}$. Dado $x \in \overline{a}$, vemos que xRa. Como xRa e aRb, deduzimos, por transitividade, que xRb e, portanto, $x \in \overline{b}$, donde $\overline{a} \subset \overline{b}$. Analogamente se mostra que $\overline{b} \subset \overline{a}$. Disso, concluímos que $\overline{a} = \overline{b}$.

($\Leftarrow$) Supondo agora que $\overline{a} = \overline{b}$, mostremos que aRb. Como aRa, temos $a \in \overline{a}$ e, usando a hipótese de que $\overline{a} = \overline{b}$, temos $a \in \overline{b}$ e, portanto, aRb.

2.9 Conjunto Quociente como Partição

Definição 2.12 Dada uma relação de equivalência R sobre E, definimos o *conjunto quociente* de E por R como o conjunto das classes de equivalência módulo R, indicado por E/R, ou seja,

$$E/R = \{\overline{a} \subset E; a \in E\}. \tag{2.1}$$

Definição 2.13 Dado um conjunto não vazio E, definimos como partição de E toda classe $\mathscr{F}$ de subconjuntos não vazios de E com as propriedades:

i) Se $A, B \in \mathscr{F}$, então $A = B$ ou $A \cap B = \emptyset$;
ii) $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathscr{F}} A = E$.

Proposição 2.9 Dada uma relação de equivalência R sobre E, o conjunto quociente E/R é uma partição do conjunto E.

Demonstração: i) Dados $\overline{a}, \overline{b} \in E/R$, mostremos que $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$ ou $\overline{a} = \overline{b}$. Se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então existe $x \in \overline{a} \cap \overline{b}$, donde $x \in \overline{a}$ e $x \in \overline{b}$ e, portanto, xRa e xRb. Então, temos aRx e xRb, donde, por transitividade, aRb. Finalmente, pela Proposição 2.8, conclui-se que $\overline{a} = \overline{b}$.

ii) Mostremos que $\displaystyle\bigcup_{a \in E} \overline{a} = E$. Dado $x \in \displaystyle\bigcup_{a \in E} \overline{a}$, existe $a \in E$ tal que $x \in \overline{a}$. Como $\overline{a} \subset E$, $x \in E$. Então $\displaystyle\bigcup_{a \in E} \overline{a} \subset E$. Por outro lado, dado $x \in E$, temos que xRx, donde $x \in \overline{x}$ e, portanto,

$x \in \bigcup_{a\in E} \overline{a}$. Então $E \subset \bigcup_{a\in E} \overline{a}$. Como $E \subset \bigcup_{a\in E} \overline{a}$ e $\bigcup_{a\in E} \overline{a} \subset E$, concluímos que $\bigcup_{a\in E} \overline{a} = E$.

Exemplo 2.15 Considere a relação de equivalência S sobre o conjunto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, dada por $(a,b)S(c,d)$, se, e somente se, $ad = bc$. Então, cada classe

$$\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*; ay = bx\} \tag{2.2}$$

define um conjunto de pontos $(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ ao longo da reta $ay = bx$ que passa pela origem. O conjunto dessas classes define um particionamento do espaço $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, em que cada subconjunto é formado por pontos ao longo de uma reta que passa pela origem.

2.10 Relações de Ordem

Nesta seção, discutimos as relações de ordem que estabelecem condições segundo as quais dois elementos em um conjunto são ditos comparáveis, no sentido de que um precede o outro. O conceito de conjunto ordenado será importante nos capítulos seguintes para construção dos números naturais, inteiros e racionais.

Definição 2.14 Dizemos que uma relação R sobre um conjunto não vazio E é uma *relação de ordem* (*parcial*) sobre E se, e somente se, R atender às propriedades:

- $\forall x \in E$, xRx; (reflexiva)
- $\forall x,y \in E$, se xRy e yRx, então $x = y$; (antissimétrica)
- $\forall x,y,z \in E$, se xRy e yRz, então xRz. (transitiva)

Se, além disso, R também é conexa, dizemos que R é uma *relação de ordem total*.

Nota 2.4 Se R é uma relação de ordem parcial sobre E, temos:

i) O conjunto E se diz *parcialmente ordenado*.
ii) Se aRb, dizemos que *a precede b* e usamos a notação $a \preccurlyeq b$.
iii) Se aRb e $a \neq b$, dizemos que *a precede estritamente b* e escrevemos $a \prec b$.
iv) Se aRb ou bRa, os elementos a e b são ditos *comparáveis segundo R*.
v) Se todos os elementos de E são, dois a dois, comparáveis, dizemos que o conjunto E é *totalmente ordenado*.
Quando E é um conjunto numérico (conjunto em que se pode definir uma adição e uma multiplicação), os símbolos de precedência são substituídos pelos de $\leq$ ou $<$, respectivamente.

Exemplo 2.16 Sejam os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{c\}$, $D = \{a,b\}$, $E = \{a,c\}$, $F = \{b,c\}$ e $G = \{a,b,c\}$. A relação R sobre $H = \{A,B,C,D,E,F,G\}$, dada por XRY se, e somente se, $X \subset Y$, é uma relação de ordem parcial. De fato:

i) $\forall X \in H$, $X \subset X$, então XRX; (reflexiva)
ii) $\forall X,Y \in H$, se $X \subset Y$ e $Y \subset X$, então $X = Y$; (antissimétrica)
iii) $\forall X,Y,Z \in H$, se $X \subset Y$ e $Y \subset Z$, então $X \subset Z$. (transitiva)

Note que R não é uma relação de ordem total, pois, por exemplo, A e B não são comparáveis. A Figura 2.3 mostra uma *Representação Gráfica Simplificada* para a relação R. Nessa representação, cada $(X,Y) \in R$ é representado por um traço ascendente. As propriedades reflexiva e transitiva não são ilustradas nessa representação.

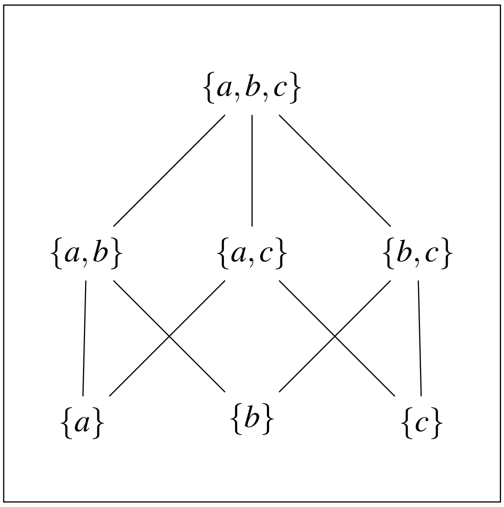


Figura 2.3: *Representação gráfica simplificada para uma relação de ordem parcial.*

2.11 Limites Superiores e Inferiores

Definição 2.15 Seja um conjunto E e a relação de ordem parcial $\leq$ sobre E. Seja ainda um subconjunto não vazio $A \subset E$. Definimos:

i) Um *limite superior* de A é um elemento $L \in E$ tal que $\forall x \in A$ vale $x \leq L$;
ii) Um *limite inferior* de A é um elemento $l \in E$ tal que $\forall x \in A$ vale $l \leq x$;
iii) Um *máximo* de A é um elemento $M \in A$ tal que $\forall x \in A$ vale $x \leq M$;
iv) Um *mínimo* de A é um elemento $m \in A$ tal que $\forall x \in A$ vale $m \leq x$;
v) O *supremo* de A é o mínimo, se existir, do conjunto dos limites superiores de A;
vi) O *ínfimo* de A é o máximo, se existir, do conjunto dos limites inferiores de A;
vii) Um *elemento maximal* de A é um elemento $N \in A$ tal que $\forall x \in A$ se $N \leq x$, então $x = N$;
viii) Um *elemento minimal* de A é um elemento $n \in A$ tal que $\forall x \in A$ se $x \leq n$, então $x = n$.

Exemplo 2.17 Seja o conjunto $E = \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$ e a relação de ordem parcial R dada por: aRb se, e somente se, $a|b$ (a é divisor de b). Dado o conjunto $A = \{3,6,9\}$, temos:

- Os limites superiores de A são 18 e 36.
- Os limites inferiores de A são 1 e 3.
- A não possui elemento máximo.
- O mínimo de A é 3.
- O supremo de A é 18.
- O ínfimo de A é 3.
- Os elementos maximais de A são 6 e 9.
- Apenas o 3 é elemento minimal de A.

A Figura 2.4 traz a representação simplificada para a relação do exemplo acima. A linha tracejada representa o subconjunto $A \subset E$.

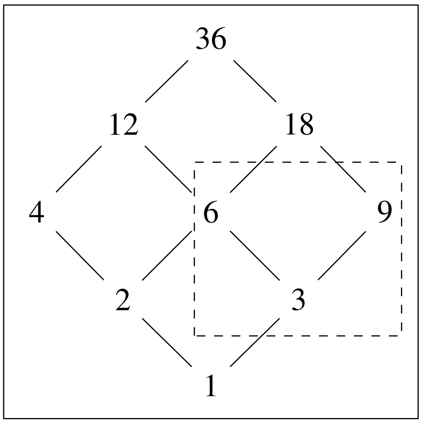


Figura 2.4: *Representação simplificada para relação de ordem parcial sobre E*.

3. Números Naturais

3.1 Introdução

Historicamente o homem teve contato com as ideias de conjuntos desde tempos remotos, sobretudo no que se refere à contagem de objetos das mais diversas naturezas. Em escavações arqueológicas, foram descobertas pequenas tábuas, nas quais o homem da pré-história já fazia registros da quantidade de animais de seu rebanho, usando um conjunto de símbolos. Outros registros apontam a associação entre quantidades de animais e quantidades de pedrinhas guardadas em um recipiente [6].

Assim, mesmo sem a ideia de número, podia-se comparar o tamanho do rebanho, fazer um inventário diário e perceber a eventual falta de algum animal. Ao associar cada animal do rebanho a uma pedrinha guardada em um recipiente físico, já estava presente a ideia intuitiva da contagem dos tempos modernos. De fato, quando fazemos a contagem de objetos, estamos associando cada objeto, não a uma pedrinha, mas a um elemento abstrato que conhecemos como número natural.

O conjunto dos números naturais foi criado e recriado ao longo do tempo e do espaço, independentemente por diversos povos, para que se pudesse contar objetos, eventos da natureza e quantificar o tempo e o espaço nos primórdios da ciência. Ainda que, conceitualmente, o conjunto criado fosse o mesmo, a simbologia usada por diferentes povos passou por diversas variações até chegar ao moderno sistema posicional em que um conjunto finito de algarismos é suficiente para representar qualquer número natural. "O uso dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 nos parece tão evidente que chegamos quase a considerá-lo como uma aptidão inata do ser humano, como algo que lhe aconteceria do mesmo modo que andar e falar" [7].

3.2 Axiomas de Peano

A partir da existência dos números naturais é possível definir rigorosamente outros conjuntos numéricos e sofisticados objetos matemáticos, sempre a partir de objetos anteriormente conhecidos. Entretanto, o conjunto dos números naturais não é definido a partir de outros objetos, mas deduzido de forma axiomática, como proposto pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932). Então, é simplesmente proposto a existência de um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados *números naturais* e uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ em que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $s(n)$ é chamado sucessor de n. Deve-se admitir que essa função s satisfaz os seguintes *Axiomas de Peano*:

A1) A função s é injetiva, ou seja, $\forall n, m \in \mathbb{N} : n \neq m \Rightarrow s(n) \neq s(m)$.
A2) Existe um único elemento em $\mathbb{N}$ que não é sucessor de nenhum outro elemento de $\mathbb{N}$. Esse elemento, indicado por $1 \in \mathbb{N}$, será chamado número *um*. Ou seja, $\mathbb{N} - s(\mathbb{N}) = 1$.
A3) Se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto tal que $1 \in X$ e, $\forall n \in X$, vale $s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

Nota 3.1 O axioma (A3) é conhecido como *Princípio de Indução*. Usaremos esse princípio nas demonstrações neste Capítulo, ou seja, diremos que elementos de um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ satisfazem determinada propriedade. Ao mostrar que $1 \in X$ e que $r \in X \Rightarrow s(r) \in X$, concluiremos que $X = \mathbb{N}$ usando o Axioma (A3), ou seja, a propriedade será válida para todos os naturais.

Nota 3.2 As propriedades dos números naturais, que serão mostradas neste Capítulo, dependem da *aceitação* dos Axiomas (A1), (A2) e (A3). A não aceitação ou questionamento desses axiomas invalidaria não só os resultados sobre números naturais, mas toda a teoria de números obtida a partir deles. A partir da *aceitação* desses axiomas, não precisamos aceitar outros resultados, pois todos os demais resultados poderão ser rigorosamente demonstrados.

Até então, sabemos que $\mathbb{N} \neq \emptyset$, pois $1 \in \mathbb{N}$, por (A2). Como $1 \in \mathbb{N}$, existe $s(1) \in \mathbb{N}$ e $s(1) \neq 1$, pois 1 não é sucessor de nenhum outro elemento. Admitimos então que $s(1)$ é outro elemento em $\mathbb{N}$ e chamamos esse elemento de número *dois*, indicado por 2. Como $2 \in \mathbb{N}$, deve existir $s(2) \in \mathbb{N}$, com $s(2) \neq s(1)$, pois s é injetiva por (A1). Como $s(2) \neq 1$ e $s(2) \neq 2$, deve existir outro elemento em $\mathbb{N}$ e chamamos esse elemento de *três*, indicado por 3. Com o mesmo raciocínio, admitimos a existência de elementos indicados por $4, 5, 6, 7$ e assim sucessivamente. Desse modo temos, como já conhecemos, o conjunto dos números naturais e seus objetos que se escrevem como

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}.$$

Nota 3.3 Em alguns textos, o elemento 0 (zero) pertence ao conjunto $\mathbb{N}$. Entretanto, como discutido em [8], a adoção ou não do zero como natural é uma convenção que se adota de acordo com os objetivos do texto.

Note que a função s pode ser iterada um número arbitrário de vezes fazendo $s^1(n) = s(n)$ e $s^{s(m)}(n) = s(s^m(n))$. Dessa forma, temos $s^1(n) = s(n)$, $s^2(n) = s(s(n))$, $s^3(n) = s(s(s(n)))$ e, assim, sucessivamente. Essa iteração da função s por composição será usada para definir operação de adição nos naturais. Por enquanto, observe que temos, por exemplo,

$$s^3(4) = s^{s(2)}(4) = s(s^2(4)) = s(s^{s(1)}(4)) = s(s(s^1(4))) = s(s(s(4))).$$

3.3 Adição com Números Naturais

Uma operação em $\mathbb{N}$ deve ser vista como uma função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que associa um número natural a cada par de números naturais dados. Usualmente, uma operação é indicada por um símbolo, como $*, +, -, \times$, de forma que indicamos $f(m, n) = m * n$, se adotamos o símbolo $*$ para a operação definida por f. No que segue, adotamos o símbolo $+$ para indicar a operação de *adição* entre números naturais.

Definição 3.1 Definimos como *adição* de números naturais a operação $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que indicaremos por $f(n,m) = n+m$, onde

$$n+m = s^m(n).$$

Nota 3.4 O número natural $n+m$, obtido pela adição de n e m, é chamado *soma*.

Note que podemos escrever $s(n) = n+1$, pois, pela definição de adição, temos $n+1 = s^1(n) = s(n)$. Então, podemos nos referir ao sucessor de um número $n \in \mathbb{N}$ como $s(n)$ ou como $n+1$. Com a definição, podemos verificar resultados que sempre aceitamos a partir da tabuada.

Exemplo 3.1 Vejamos alguns exemplos da adição de números naturais usando a definição:

- $2+2 = s^2(2) = s(s(2)) = s(3) = 4$
- $4+3 = s^3(4) = s(s(s(4))) = s(s(5)) = s(6) = 7$
- $3+4 = s^4(3) = s(s(s(s(3)))) = s(s(s(4))) = s(s(5)) = s(6) = 7$

Note que o exemplo acima usa apenas fatos que assumimos ao deduzir os elementos de $\mathbb{N}$, ou seja, $s(2) = 3,\ s(3) = 4,\ s(4) = 5,\ s(5) = 6 \ \text{ e } \ s(6) = 7$.

Exemplo 3.2 Como temos $s(n) = n+1$, podemos ainda escrever a soma usando essa notação. Por exemplo, temos:

$$\begin{aligned} 4+3 &= s^3(4) \\ &= s(s(s(4)))) \\ &= s(s(4+1)) \\ &= s((4+1)+1) \\ &= ((4+1)+1)+1 \\ &= 4+1+1+1. \end{aligned}$$

A última igualdade do exemplo 3.2 usa a propriedade associativa da adição que será mostrada na proposição 3.2. Inicialmente, a proposição seguinte estabelece resultados preliminares para enunciarmos as propriedades da adição.

Proposição 3.1 Como consequência da definição de adição, temos:

i) $m+(n+1) = (m+n)+1, \quad$ ou seja, $\quad m+s(n) = s(m+n)$;
ii) $1+n = n+1$;
iii) $m+1 = n+1 \Rightarrow m = n$.
iv) $s^m(n) \neq n$

Demonstração:

i) Observe que $m+(n+1) = s^{n+1}(m) = s(s^n(m)) = s(m+n) = (m+n)+1$. Em outros termos, podemos escrever $m+s(n) = s(m+n)$.
ii) Se $X = \{n \in \mathbb{N}; 1+n = n+1\}$, temos que $1 \in X$ pois $1+1 = 1+1$. Além disso, supondo por hipótese $r \in X$, teríamos $1+r = r+1$. Nesse caso, observe que $1+s(r) = 1+(r+1) = (1+r)+1$, por (i). Usando a hipótese, teríamos $1+s(r) = (r+1)+1 = s(r)+1$. Portanto,

$s(r) \in X$ e, pelo Axioma (A3), $X = \mathbb{N}$.

ii) Veja que $m+1 = n+1 \Rightarrow s(m) = s(n)$. Como s é injetiva, teremos que $m = n$.

iv) Exercício.

Enunciamos agora importantes propriedades da operação de adição no conjunto dos números naturais. As propriedades associativa, comutativa e lei do corte aqui estabelecidas permitem as manipulações algébricas que são usadas frequentemente.

Proposição 3.2 Para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$, valem as seguintes propriedades:

a) $(m+n)+p = m+(n+p)$ (associatividade);
b) $m+n = n+m$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$ (comutatividade);
c) $m+p = n+p$, implica que $m = n$ (lei do corte).

Demonstração:

a) Seja $X = \{p \in \mathbb{N}; m+(n+p) = (m+n)+p\}$, com $m, n \in \mathbb{N}$. Temos que $1 \in X$, pois $m+(n+1) = (m+n)+1$ (Proposição 3.1). Considere, por hipótese, que $r \in X$, ou seja, $m+(n+r) = (m+n)+r$. Se essa hipótese implicar $m+(n+s(r)) = (m+n)+s(r)$, teremos que $s(r) \in X$ e, pelo Axioma (A3), que $X = \mathbb{N}$. Veja que

$$\begin{aligned} m+(n+s(r)) &= m+s(n+r) \quad \text{(pela Proposição 3.1)} \\ &= s(m+(n+r)) \quad \text{(pela Proposição 3.1)} \\ &= s((m+n)+r) \quad \text{(pela hipótese)} \\ &= (m+n)+s(r). \quad \text{(pela Proposição 3.1)} \end{aligned}$$

Então, $s(r) \in X$ e, pelo Axioma (A3), $X = \mathbb{N}$. Portanto, para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$ vale a associatividade.

b) Seja $X = \{n \in \mathbb{N}; m+n = n+m\}$, com $m \in \mathbb{N}$. Temos que $1 \in X$, pois $m+1 = 1+m$ (Proposição 3.1). Considere por hipótese que $r \in X$. Se essa hipótese implicar $s(r) \in X$, teremos, pelo Axioma (A3), que $X = \mathbb{N}$. De fato, $m+s(r) = m+(r+1) = (m+r)+1 = (r+m)+1 = r+(m+1) = r+(1+m) = (r+1)+m = s(r)+m$. Ou seja, $m+s(r) = s(r)+m$, donde $s(r) \in X$. Pelo Axioma (A3), temos que $X = \mathbb{N}$. Então, para todo $m, n \in \mathbb{N}$ vale a comutatividade.

c) Seja $X = \{p \in \mathbb{N}; m+p = n+p \Rightarrow m = n\}$, com $m, n \in \mathbb{N}$. Temos que $1 \in X$, pois $m+1 = n+1 \Rightarrow m = n$ (Proposição 3.1). Tome por hipótese que $r \in X$, ou seja, $m+r = n+r$ implica que $m = n$. Se essa hipótese implicar $s(r) \in X$, teremos, pelo Axioma (A3), que $X = \mathbb{N}$. De fato, se $m+s(r) = n+s(r)$, temos que $s(m+r) = s(n+r)$. Como s é injetiva, $m+r = n+r$ donde, por hipótese, $m = n$. Portanto, $s(r) \in X$ e, pelo Axioma (A3), $X = \mathbb{N}$. Então para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$ vale a lei do corte.

3.4 Multiplicação com Números Naturais

A multiplicação em $\mathbb{N}$ será uma operação $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que associa um natural indicado por $g(n,m) = n \cdot m$ a cada par $n, m \in \mathbb{N}$. Intuitivamente $n \cdot m$, significa somar n com n um número m de vezes. Formalmente, a multiplicação pode ser definida como segue:

Definição 3.2 Definimos como *multiplicação* de números naturais a operação $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que indicaremos por $g(n,m) = n \cdot m$, onde $n \cdot m$ é obtido recursivamente como

$$\begin{cases} n \cdot 1 = n \\ n \cdot (m+1) = n \cdot m + n \end{cases}$$

Nota 3.5 O número real $n \cdot m$, obtido pela multiplicação de n e m é chamado *produto*.

Exemplo 3.3 Usando a definição temos o produto $5 \cdot 4$ dado por

$$\begin{aligned} 5 \cdot 4 &= 5 \cdot (3+1) = 5 \cdot 3 + 5 \\ &= 5 \cdot (2+1) + 5 = 5 \cdot 2 + 5 + 5 \\ &= 5 \cdot (1+1) + 5 + 5 = 5 \cdot 1 + 5 + 5 + 5 \\ &= 5 + 5 + 5 + 5 \end{aligned}$$

Assim como a operação de adição, a multiplicação no conjunto dos naturais tem as propriedades comutativa, associativa e lei do corte. A proposição seguinte, cuja demonstração deixamos com exercício, estabelece resultados preliminares para mostrar essas propriedades.

Proposição 3.3 Como consequência da definição de multiplicação entre naturais, temos:

i) $m \cdot 1 = 1 \cdot m$;
ii) $(m \cdot n) \cdot 1 = m \cdot (n \cdot 1)$;
iii) $m \cdot 1 = n \cdot 1 \Rightarrow m = n$.

Demonstração: Mostremos o item (i):

i) Observe que, por definição, $m \cdot 1 = m$, mas não se afirma o mesmo sobre $1 \cdot m$. Precisamos mostrar que $1 \cdot m = m$ para concluir que $m \cdot 1 = 1 \cdot m$. Primeiro, observamos que $1 \cdot 1 = 1$. Agora, tomando por hipótese que $1 \cdot r = r$, concluímos que $1 \cdot s(r) = s(r)$, estará provado, pelo Axioma (A3), que $1 \cdot m = m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por definição, $1 \cdot s(r) = 1 \cdot (r+1) = 1 \cdot r + 1$ e, usando a hipótese, $1 \cdot s(r) = 1 \cdot r + 1 = r + 1 = s(r)$. Portanto, $1 \cdot m = m = m \cdot 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$.
ii) Basta aplicar a definição.
ii) Basta aplicar a definição.

Proposição 3.4 A multiplicação entre números naturais satisfaz as seguintes propriedades:

a) $(m+n) \cdot p = m.p + n \cdot p$, para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$ (distributividade);
b) $m \cdot n = n \cdot m$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$ (comutatividade);
c) $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$, para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$ (associatividade);
d) $m \cdot p = n \cdot p$, implica que $m = n$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$ (lei do corte);

Demonstração: A demonstração dessas propriedades se faz pelo Axioma (A3).

a) Seja $X = \{p \in \mathbb{N}; (m+n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p\}$ com $m, n \in \mathbb{N}$. Temos que $1 \in X$, pois $(m+n) \cdot 1 = m \cdot 1 + n \cdot 1 = m + n$. Suponha, por hipótese, que $r \in X$, ou seja, que $(m+n) \cdot r = m \cdot r + n \cdot r$. Se essa hipótese implicar que $s(r) \in X$ então, pelo Axioma (A3), teremos que $X = \mathbb{N}$. Vejamos:

$$
\begin{aligned}
(m+n)\cdot s(r) &= (m+n)\cdot(r+1)\\
&= (m+n)\cdot r+(m+n)\\
&= m\cdot r+n\cdot r+(n+m)\\
&= m\cdot r+(n\cdot r+n)+m\\
&= m\cdot r+n\cdot(r+1)+m\\
&= m\cdot r+m+n\cdot(r+1)\\
&= m\cdot(r+1)+n\cdot(r+1)\\
&= m\cdot s(r)+n\cdot s(r)
\end{aligned}
$$

Portanto, $s(r)\in X$ e, pelo Axioma (A3), $X=\mathbb{N}$.

b) Seja $X=\{p\in\mathbb{N}; m\cdot p=p\cdot m\}$ com $m\in\mathbb{N}$. Temos que $1\in X$, pela Proposição 3.3. Suponha, por hipótese, que $r\in X$, ou seja, que $m\cdot r=r\cdot m$. Se essa hipótese implicar que $s(r)\in X$ então, pelo Axioma (A3), teremos que $X=\mathbb{N}$. Vejamos:

$$
\begin{aligned}
m\cdot s(r) &= m\cdot(r+1)\\
&= m\cdot r+m\\
&= r\cdot m+m\cdot 1\\
&= r\cdot m+1\cdot m\\
&= (r+1)\cdot m\\
&= s(r)\cdot m
\end{aligned}
$$

Portanto, $s(r)\in X$ e, pelo Axioma (A3), $X=\mathbb{N}$.

c) Exercício.
d) Exercício.

Um conjunto é dito *Conjunto Numérico* quando é munido de uma adição e uma multiplicação, tais que tanto a adição como a multiplicação são comutativas e associativas e, além disso, a multiplicação é distributiva em relação à adição [9]. Nesse sentido, o conjunto $\mathbb{N}$, com as operações de adição e multiplicação aqui definidas. é um conjunto numérico.

3.5 Relação de Ordem nos Naturais

A partir da operação de adição entre números naturais, podemos definir uma relação de ordem sobre $\mathbb{N}$, ou seja, uma relação que permita comparar dois naturais e decidir qual número precede qual. Conforme estabelecido na Seção 2.10, uma relação de ordem deve guardar as propriedades *reflexiva*, *antissimétrica* e *transitiva*. Definiremos então a relação de precedência e, em seguida, mostraremos que tal relação é uma relação de ordem.

Definição 3.3 Definimos como relação de precedência sobre $\mathbb{N}$ a relação indicada por '$\leq$' e dada por $a\leq b$ se, e somente se, $a=b$ ou existe $c\in\mathbb{N}$ tal que $a+c=b$. Nesse caso, dizemos que *a é menor ou igual a b*.

Exemplo 3.4 Temos que $3\leq 8$, pois existe $5\in\mathbb{N}$ tal que $3+5=8$. Também temos que $4\leq 4$, pois $4=4$.

Para caracterizar a relação de precedência como uma relação de ordem, precisamos mostrar que ela é reflexiva, antissimétrica e transitiva. A proposição seguinte garante essas propriedades.

Proposição 3.5 A relação de precedência sobre $\mathbb{N}$ é uma relação de ordem.

Demonstração: Mostremos que a precedência é reflexiva, antissimétrica e transitiva:

i) $\forall a \in \mathbb{N}$, vale $a \leq a$, pois $a = a$; (reflexiva)
ii) Supondo $a \leq b$ e $b \leq a$, deve valer $a = b$. Caso contrário, teríamos $a + c_1 = b$ e $b + c_2 = a$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$. Disso, teríamos $(b + c_2) + c_1 = b \Rightarrow b + (c_1 + c_2) = b$. Tomando $m = c_1 + c_2$, teríamos $b + m = b \Rightarrow s^m(b) = b$, que é absurdo (Proposição 3.1). Então $a \leq b$ e $b \leq a$ $\Rightarrow a = b$; (antissimetria)
iii) Suponha que $a \leq b$ e $b \leq c$. Se $a = b$ ou $b = c$, concluímos que $a \leq c$. De outra forma, considere $a + c_1 = b$ e $b + c_2 = c$. Então teríamos $(a + c_1) + c_2 = c \Rightarrow a + (c_1 + c_2) = c \Rightarrow$ $a \leq c$. Então, $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$. (transitiva)

Considerando a relação de ordem $\leq$ sobre $\mathbb{N}$, se $a \leq b$, temos $a = b$ ou $a + c = b$ para algum $c \in \mathbb{N}$. No segundo caso, escrevemos $a < b$ e dizemos que *a é estritamente menor que b*. Então, $a \leq b$ significa $a = b$ ou $a < b$. A proposição seguinte garante que todos os elementos de $\mathbb{N}$ são comparáveis, ou seja, a precedência sobre $\mathbb{N}$ é uma relação de ordem total.

Proposição 3.6 A relação de ordem $\leq$ em $\mathbb{N}$ satisfaz as seguintes propriedades:

a) Se $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$, para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$ (Monotonicidade da Adição);
b) Todos os elementos de $\mathbb{N}$ são comparáveis por precedência, ou seja, dados $a, b \in \mathbb{N}$, vale $a \leq b$ ou $b \leq a$;
c) Dados $a, b \in \mathbb{N}$, ocorrerá sempre uma das possibilidades: $a = b$, $a < b$ ou $b < a$ (tricotomia).

Demonstração:

a) Suponha $a \leq b$. Se $a = b$, então $a + c = b + c$ e, portanto, $a + c \leq b + c$. Se $a \neq b$, então $\exists\, d \in \mathbb{N}$, tal que $b = a + d$, donde $b + c = (a + d) + c$, ou seja, $b + c = a + (d + c) = a + (c + d) = (a + c) + d$. Portanto, $b + c = (a + c) + d$, donde $a + c \leq b + c$.

b) Seja $X = \{p \in \mathbb{N}; n \leq p \text{ ou } p \leq n\}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Veja que $1 \in X$, pois $1 \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Verifique!). Suponha, por hipótese, que $r \in X$, ou seja, $n \leq r$ ou $r \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos:

i) Se for $n \leq r$, com $n \neq r$, existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $n + c = r$. Então, $(n + c) + 1 = r + 1 \Rightarrow$ $n + (c + 1) = s(r) \Rightarrow n \leq s(r)$;
ii) Se for $r \leq n$, com $r \neq n$, existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $r + c = n$. Como $1 \leq c$ para todo $c \in \mathbb{N}$, vale $r + 1 \leq r + c \leq n$. Portanto, $s(r) \leq n$;
iii) Se for $n = r$, como $r \leq r + 1$ vale $n \leq r + 1$, ou seja, $n \leq s(r)$.

Por (i),(ii) e (iii), concluímos que $r \in X \Rightarrow s(r) \in X$ e, pelo Axioma (A3), temos que $X = \mathbb{N}$. Portanto, todos os elementos de $\mathbb{N}$ são comparáveis.

c) Dados $a, b \in \mathbb{N}$, vale $a \leq b$ ou $b \leq a$, por (b). Se $a \neq b$, então existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $a + c = b$ ou $b + c = a$. Ou seja, se $a \neq b$, vale $a < b$ ou $b < a$. Portanto, $a = b$, ou $a < b$ ou $b < a$.

A Proposição 3.6 garante que a relação de precedência sobre $\mathbb{N}$ é uma relação de ordem total, uma vez que todos os elementos de $\mathbb{N}$ são comparáveis por precedência. Como $2 = s(1) = 1 + 1$, temos $1 < 2$. Como $3 = s(2) = 2 + 1$, temos $2 < 3$ e, assim, sucessivamente, temos:

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \cdots$$

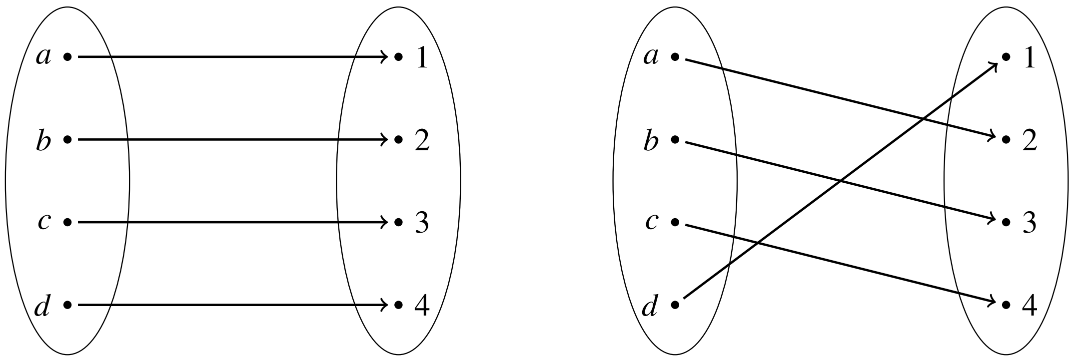
Nota 3.6 Quando $a \leq b$, usaremos também a notação $b \geq a$ e diremos que *b é maior ou igual a a*. Da mesma forma, quando $a < b$, escrevemos também $b > a$ e diremos que *b é estritamente maior que a*.

Essa relação será importante para estabelecer a ordem nos demais conjuntos numéricos, definidos a partir de $\mathbb{N}$ nos Capítulos subsequentes.

3.6 Conjuntos Finitos e Infinitos

Como dito na Introdução, o conjunto dos números naturais surge da necessidade de contar objetos de um conjunto X dado. A contagem é feita pela associação de cada objeto de X a um elemento de $\mathbb{N}$, começando por 1 e, considerando a ordem dada, até n. A contagem define então um subconjunto $I_n \subset \mathbb{N}$, dado por $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, e uma função bijetiva $f : X \to I_n$, que associa cada objeto de X a um elemento de I_n. Nesse caso, dizemos que X tem n elementos.

Exemplo 3.5 Considere, por exemplo, o conjunto $X = \{a, b, c, d\}$. A contagem de elementos de X define a bijeção $f : X \to I_4$, conforme ilustrado na Figura 3.1(a). Mas outra bijeção, $g : X \to I_4$, poderia ser definida, conforme Figura 3.1(b). De fato, uma bijeção pode ser definida de forma arbitrária, sendo cada possível bijeção associada a uma possível contagem que ordena os elementos de X de formas diferentes.



(a) (b)

Figura 3.1: *Exemplo de bijeções para contagem de um mesmo conjunto X.*

Nota 3.7 Pode-se imaginar conjuntos com quantidade arbitrariamente grandes de elementos, como o conjunto de grãos de areia de uma praia, ou gotas d'água do oceano. Mas deve haver um $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção de I_n nesse conjunto, de forma a dizer que ele tem n elementos, com n suficientemente grande.

Nota 3.8 Se considerarmos o conjunto dos anos da era Cristã e sua continuação no futuro, entendendo que depois de um ano sempre vem outro ano, teríamos dificuldade em obter I_n de forma a estabelecer uma bijeção entre elementos de I_n e o conjunto dos anos, pois admitimos que sempre haverá um ano depois do outro e, portanto, nenhum $n \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande para estabelecer uma bijeção.

A partir das Notas 3.7 e 3.8, surge a necessidade de uma classificação para diferenciar esses conjuntos. Essa diferenciação leva ao conceito de conjuntos *finitos* e *infinitos*, como definimos a seguir.

Definição 3.4 Um conjunto X é chamado de *finito* quando ele é vazio ou existe um número natural $n \in \mathbb{N}$

e uma bijeção $f: X \to I_n$. Caso contrário, X é dito *infinito*, ou seja, X não é vazio, e para qualquer $n \in \mathbb{N}$ não existe uma bijeção $f: X \to I_n$.

Nota 3.9 Quando X é um conjunto finito, a bijeção $f: X \to I_n$ é chamada de contagem dos elementos de X, e o número n é chamado de *cardinalidade* do conjunto finito X.

Exemplo 3.6 Alguns exemplos:

- O conjunto $X = \{a, e, i, o, u\}$ das vogais é finito. De fato, a bijeção $f: X \longrightarrow I_5$, dada por $f = \{(a,1), (e,2), (i,3), (o,4), (u,5)\}$ é uma contagem dos elementos de X. Nesse caso, a cardinalidade de X é 5.
- O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é infinito. De fato, não existe uma bijeção $f: \mathbb{N} \to I_n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. (Verifique).
- O conjunto dos múltiplos de 3, dado por $X = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$, é infinito. De fato, não existe uma bijeção $f: X \to I_n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ (Verifique). Nesse caso, dizemos que X é infinito e tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$.

3.7 Conjuntos Enumeráveis

Ao observar que a cardinalidade do conjunto X dos múltiplos de 3 é a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$, surge a questão de saber se todo conjunto infinito tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$. A resposta é não, e nos leva ao conceito de enumerabilidade.

Definição 3.5 Um conjunto X é chamado de *enumerável* quando existe uma função injetiva $f: X \to \mathbb{N}$. Caso contrário, X é dito *não enumerável*.

A definição acima afirma que o conjunto dos número naturais deve ser suficiente para enumerar todos os elementos do conjunto X para que este seja enumerável. Então, um conjunto enumerável pode ser finito, como o conjunto das vogais, ou infinito, como o conjunto dos múltiplos de 3.

Exemplo 3.7 Alguns exemplos:

- Se o conjunto X é finito e tem n elementos, então X é enumerável. De fato, como X é finito, existe uma bijeção $f: X \to I_n$. Basta tomar $g: X \to \mathbb{N}$, com $g(x) = f(x)$ para concluir que g é injetiva, pois, se $g(a) = g(b)$, então $f(a) = f(b)$. Isso implica que $a = b$.
- O conjunto $X = \{n \in \mathbb{N}; n > 5\}$ é enumerável. De fato, basta tomar a função injetiva $f: X \to \mathbb{N}$, dada por $f(x) = k$ tal que $k + 5 = x$.
- Uma forma simples de considerar um conjunto não enumerável é considerar o conjunto das partes de $\mathbb{N}$, ou seja, o conjunto dos subconjuntos de $\mathbb{N}$. Mas a demonstração desse fato não será vista neste Capítulo.

Proposição 3.7 São formas equivalentes de se definir enumerabilidade de conjuntos:

- Um conjunto X é enumerável se existe uma função injetiva $f: X \to \mathbb{N}$;
- Um conjunto X é enumerável se existe uma função sobrejetiva $f: \mathbb{N} \to X$;
- Um conjunto X é enumerável se for finito ou existe uma função bijetiva $f: X \to N$.

Demonstração: Exercício.

Ao definir o conjunto dos números naturais, não consideramos o *zero* e, também, não consideramos as operações de *subtração* ou de *divisão*. O elemento *zero* e operação de subtração serão definidos para o conjunto $\mathbb{Z}$, dos inteiros. Já a operação de *divisão* será definida para o conjunto $\mathbb{Q}$, dos racionais.

4. Números Inteiros

4.1 Introdução

Ao longo da história das civilizações, relações comerciais sempre foram estabelecidas, como a dos gregos com os persas, a dos romanos com os egípcios, a dos chineses com os indianos, etc. O conhecimento de um sistema de contagem, como o dos números naturais, permitiu o registro das transações comerciais e o surgimento das moedas como forma de simplificar as operações de troca. Com as transações convertidas em moedas era possível registrar, não apenas o saldo positivo, mas também eventuais dívidas a ser compensadas com saldo futuro. Há registros na Roma antiga de fatos como de um cidadão que, tendo apenas 9 denários romanos, levou um saco de farinha que vale 10 denários, ficando registrada uma dívida de 1 denário [6].

A prática de se registrar saldos e dívidas e, por conseguinte, a necessidade de compensação entre esses valores levou aos conceitos de número positivo e número negativo. A compensação entre saldo e dívida deu origem ao conceito de *subtração*, que não é uma operação possível entre os números naturais. Assim, a subtração $5-3$, por exemplo, era a compensação entre um saldo de 5 e uma dívida de 3, que deixa saldo 2. Por outro lado, a subtração $5-7$, por exemplo, era a compensação entre um saldo de 5 e uma dívida de 7, que deixa uma dívida, de 2. Mais notável era a compensação entre um saldo de 5 e uma dívida de 5, que não resultava dívida nem saldo e, portanto, não havia símbolo nos naturais para registrar o resultado. Os registros de saldos, dívidas e compensações evoluíram para uma extensão do conjunto dos números naturais em um conjunto que comporte números positivos e números negativos, bem como a operação de *subtração*.

Como conhecemos hoje, cada número inteiro é resultado de uma possível compensação entre saldos e dívidas. Intuitivamente, tomamos o par (a,b), onde a representa um saldo e b representa uma dívida. O resultado da compensação de a com b define uma diferença $a-b$, indicada pelo inteiro k, que pode ser positivo ou negativo. Se outro par (c,d) define a mesma diferença, $c-d=a-b$, então esse par é indicado pelo mesmo inteiro k. Portanto, um mesmo número inteiro pode ser definido pela compensação de pares distintos de saldos e dívidas. Como não podemos usar a notação $a-b$, com $a,b \in \mathbb{N}$, usamos o fato conhecido de que $a+d=c+b \Leftrightarrow a-b=c-d$ e dizemos que (a,b) e (c,d) definem o mesmo inteiro se $a+d=c+b$. Dessa forma, usaremos apenas *adição* entre números naturais para definir os números inteiros.

Diferentemente da simples inclusão de novos elementos, a construção formal de $\mathbb{Z}$, a partir de $\mathbb{N}$, deve preservar a relação de ordem nos naturais e estender para os novos elementos as operações de adição e multiplicação já definidas. A construção, baseada em [10] e [3], usa o conceito de Classes de Equivalência, apresentado no Capítulo 2.

4.2 Os Números Inteiros

Do ponto de vista formal, cada número inteiro será definido a partir de um par de números naturais. Mais precisamente, cada inteiro será associado a um conjunto de pares de números naturais que guardam determinada propriedade comum. Essa propriedade é estabelecida pela relação $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dada por $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+d=c+b$, que é uma relação de equivalência, como mostrado na Proposição 4.1.

Proposição 4.1 A relação $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dada por $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+d=c+b$, é uma relação de equivalência.

Demonstração: Mostremos que R é reflexiva, simétrica e transitiva:

i) $(a,b)R(a,b)$, pois $a+b=a+b$. (Reflexiva)
ii) Se $(a,b)R(c,d)$, temos que $a+d=c+b$, ou $c+b=a+d$. Então, $(c,d)R(a,b)$. (Simétrica)
iii) Se $(a,b)R(c,d)$ e $(c,d)R(e,f)$, então $a+d=c+b$ e $c+f=e+d$. Somando membro a membro, temos $(a+d)+(c+f)=(c+b)+(e+d)$. Por associatividade e comutatividade, temos $(a+f)+(c+d)=(e+b)+(c+d)$. Como vale a *Lei do Corte* em $\mathbb{N}$, temos $a+f=e+b$ e, portanto, $(a,b)R(e,f)$. (Transitiva)

Por (i), (ii) e (iii), a relação R é reflexiva, simétrica e transitiva. Portanto, R é de equivalência.

Exemplo 4.1 Temos que:

- $(1,3)R(2,4)$, pois $1+4=2+3$;
- $(5,2)R(4,1)$, pois $5+1=4+2$.

Como visto no Capítulo 2, a relação R particiona o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ em subconjuntos de pares que são equivalentes. Essa partição estabelece que cada par de naturais pertence a um, e apenas um, subconjunto definido pela relação R. Cada subconjunto de pares equivalentes define uma classe, e a classe pode ser representada por um dos seus elementos.

Exemplo 4.2 Os pares $(1,3),(5,2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ determinam as seguintes classes:

- $\overline{(1,3)} = \{(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1+d=c+3\} = \{(1,3),(2,4),(3,5),(5,6),\ldots\}$;
- $\overline{(5,2)} = \{(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 5+d=c+2\} = \{(4,1),(5,2),(6,3),(7,4),(8,5),\ldots\}$.

A partição de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ em classes definidas por R é chamada conjunto quociente, indicada por $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R$. Cada número inteiro será definido como sendo uma dessas classes e, portanto, o conjunto dos inteiros será o conjunto das classes de equivalência, ou quociente, como definimos abaixo.

Definição 4.1 Definimos o conjunto dos Números Inteiros como $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R$, ou seja,

$$\mathbb{Z} = \{\overline{(a,b)} \mid (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$$

Cada classe $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$ será indicada por um símbolo, conforme a seguir:

i) Se $a > b$, tomamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $a = b + k$ e indicamos $+k = \overline{(a,b)}$;
ii) Se $a < b$, tomamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $a + k = b$ e indicamos $-k = \overline{(a,b)}$;
iii) Se $a = b$, indicamos $0 = \overline{(a,b)} = \overline{(a,a)}$. O símbolo 0 chamamos de *zero*.

Nota 4.1 Se $a > b$, a classe $+k = \overline{(a,b)}$ é chamada de *número inteiro positivo*. Se $a < b$, a classe $-k = \overline{(a,b)}$ é chamada de *número inteiro negativo*. A classe do *zero* é aquela em que a primeira coordenada é igual à segunda coordenada, ou seja, é a classe dada por $0 = \overline{(a,a)}$, qualquer que seja $a \in \mathbb{N}$.

Nota 4.2 Por definição, dado $t \in \mathbb{Z}$, temos uma, e apenas uma, de três possibilidades:

i) Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $t = +k$, onde $+k = \overline{(a+k,a)}$ para todo $a \in \mathbb{N}$;
ii) Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $t = -k$, onde $-k = \overline{(a,a+k)}$ para todo $a \in \mathbb{N}$;
iii) $t = 0$, onde $0 = \overline{(a,a)}$ para todo $a \in \mathbb{N}$.

Nota 4.3 Não se confunde $k \in \mathbb{N}$ com $+k$ ou $-k$. Enquanto $k \in \mathbb{N}$ é um número natural, $+k \in \mathbb{Z}$ é um número inteiro positivo e $-k \in \mathbb{Z}$ é um número inteiro negativo. De fato, dado $k \in \mathbb{N}$, temos as classes $+k = \overline{(1+k,1)} \in \mathbb{Z}$ e $-k = \overline{(1,1+k)} \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 4.3 Temos que:

- $+3 = \overline{(5,2)}$, pois $5 > 2$ e temos $5 = 2 + \mathbf{3}$;
- $-2 = \overline{(1,3)}$, pois $1 < 3$ e temos $3 = 1 + \mathbf{2}$;
- $+2 = \overline{(3,1)}$, pois $3 > 1$ e temos $3 = 1 + \mathbf{2}$;
- $0 = \overline{(3,3)}$, pois $3 = 3$.

A partir da definição, o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros deve ter, além do zero, um número positivo e um número negativo associado a cada número natural. Assim, escrevemos

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \cdots\}$$

4.3 Adição com Números Inteiros

Considerando que cada inteiro pode ser representado por um conjunto de pares equivalentes de naturais, a definição de adição nos inteiros permite que, independentemente do par considerado, a soma resultante seja a mesma.

Definição 4.2 Dados $s,t \in \mathbb{Z}$, considere $a,b,c,d \in \mathbb{N}$ tais que $s = \overline{(a,b)}$ e $t = \overline{(c,d)}$. A soma $s+t$ é definida pela operação de *Adição* sobre o conjunto dos inteiros, dada pela função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, onde

$$f(s,t) = s + t = \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c, b+d)}.$$

Exemplo 4.4 Usando a definição, temos:

- Dados $+2, +3 \in \mathbb{Z}$, tome $3,1,5,2 \in \mathbb{N}$ tais que $+2 = \overline{(3,1)}$ e $+3 = \overline{(5,2)}$. Então,

$$(+2) + (+3) = \overline{(3,1)} + \overline{(5,2)} = \overline{(3+5, 1+2)} = \overline{(8,3)} = +5;$$

- Dados $+3,-5 \in \mathbb{Z}$, tome $5,2,1,6 \in \mathbb{N}$ tais que $+3 = \overline{(5,2)}$ e $-5 = \overline{(1,6)}$. Então
$$(+3)+(-5) = \overline{(5,2)} + \overline{(1,6)} = \overline{(5+1,2+6)} = \overline{(6,8)} = -2;$$
- Dados $0,+2 \in \mathbb{Z}$, tome $2,3,1 \in \mathbb{N}$ tais que $0 = \overline{(2,2)}$ e $+2 = \overline{(3,1)}$. Então
$$0+(+2) = \overline{(2,2)} + \overline{(3,1)} = \overline{(2+3,2+1)} = \overline{(5,3)} = +2.$$

Nota 4.4 Note que, nos exemplos acima, os pares de números naturais escolhidos para representar cada classe podem ser outros. De fato, cada classe pode ser representada por qualquer dos pares pertencentes à classe.

Como no conjunto dos números naturais, a adição no conjunto dos números inteiros satisfaz às propriedades *comutativa, associativa* e *lei do corte*. Além disso, admite um *elemento neutro* e, para cada inteiro, existe um *elemento simétrico*, como mostrado na Proposição 4.2.

Proposição 4.2 Para todo $r,s,t \in \mathbb{Z}$, verificam-se as seguintes propriedades:

S1) $r+s = s+r$; (Comutatividade)
S2) $(r+s)+t = r+(s+t)$; (Associatividade)
S3) Existe $0 \in \mathbb{Z}$, tal que $r+0 = r$; (Elemento neutro da adição)
S4) Existe $r' \in \mathbb{Z}$, tal que $r+r' = 0$; (Simétrico Aditivo)
S5) Se $r+t = s+t$, então $r = s$. (Lei do Corte)

Demonstração: Para demonstração, tomamos $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{N}$ tais que $r = \overline{(a,b)}, s = \overline{(c,d)}$ e $t = \overline{(e,f)}$. Assim, temos:

S1) Usando a comutatividade da adição em $\mathbb{N}$, temos
$$\begin{aligned} r+s &= \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} \\ &= \overline{(a+c,b+d)} \\ &= \overline{(c+a,d+b)} \\ &= \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)} = s+r \end{aligned}$$

S2) Usando a associatividade da adição em $\mathbb{N}$, temos
$$\begin{aligned} (r+s)+t &= \left(\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}\right) + \overline{(e,f)} \\ &= \overline{(a+c,b+d)} + \overline{(e,f)} \\ &= \overline{((a+c)+e,(b+d)+f)} \\ &= \overline{(a+(c+e),b+(d+f))} \\ &= \overline{(a,b)} + \overline{(c+e,d+f)} \\ &= \overline{(a,b)} + \left(\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}\right) = r+(s+t) \end{aligned}$$

S3) Note que $(a+1,b+1)R(a,b)$, pois $(a+1)+b = a+(b+1)$. Então, pela Proposição 2.8, vale $\overline{(a+1,b+1)} = \overline{(a,b)}$. Disso, temos que
$$r+0 = \overline{(a,b)} + \overline{(1,1)} = \overline{(a+1,b+1)} = \overline{(a,b)} = r$$
.

S4) Note que $(a+b,a+b)R(1,1)$, pois $(a+b)+1 = 1+(a+b)$. Então, pela Proposição 2.8, vale $\overline{(a+b,a+b)} = \overline{(1,1)}$. Dado $r = \overline{(a,b)}$, tome $r' = \overline{(b,a)}$ e temos
$$r+r' = \overline{(a,b)} + \overline{(b,a)} = \overline{(a+b,b+a)} = \overline{(a+b,a+b)} = \overline{(1,1)} = 0$$

S5) Exercício.

Nota 4.5 O simétrico aditivo r' será indicado também por $-r$. Assim, para $r = \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, temos o simétrico $-r = \overline{(b,a)} \in \mathbb{Z}$. Portanto, $r + (-r) = 0$ para todo $r \in \mathbb{Z}$. Chamamos o simétrico aditivo, $-r$, de elemento *oposto* de r.

Proposição 4.3 Se $r \in \mathbb{Z}$ for um número negativo, o oposto, $-r$, é um número positivo. Reciprocamente, se $r \in \mathbb{Z}$ for um número positivo, o oposto, $-r$, é um número negativo.

Demonstração: Suponha $r \in \mathbb{Z}$ negativo. Então, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $r = -k = \overline{(1, 1+k)}$. Nesse caso, $-r = \overline{(1+k, 1)} = +k$. Portanto, o oposto de r é um número positivo, dado por $-r = +k$. A recíproca se mostra com argumento similar.

Não precisamos definir uma operação de subtração entre números inteiros. De fato, toda subtração $r - s$ nos inteiros é, na verdade, uma adição $r + (-s)$.

Exemplo 4.5 Dados $+3, +5 \in \mathbb{Z}$, tome as classes $+3 = \overline{(4,1)}$ e $+5 = \overline{(7,2)}$. Então, $-5 = \overline{(2,7)}$ e temos

$$(+3) - (+5) = (+3) + (-5) = \overline{(4,1)} + \overline{(2,7)} = \overline{(6,8)} = -2.$$

4.4 Multiplicação com Números Inteiros

Assim como na definição da adição nos inteiro, a definição de multiplicação permite que, independentemente do par considerado para representar um inteiro, o produto resultante é o mesmo.

Definição 4.3 Dados $s, t \in \mathbb{Z}$, considere $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tais que $s = \overline{(a,b)}$ e $t = \overline{(c,d)}$. O produto $s \cdot t$ é definido pela operação de *Multiplicação* sobre o conjunto dos inteiros, dada pela função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, em que

$$f(s,t) = s \cdot t = \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + c \cdot b)}.$$

Exemplo 4.6 Usando a definição, temos:

- Dados $+2, +3 \in \mathbb{Z}$, tome $3, 1, 5, 2 \in \mathbb{N}$ tais que $+2 = \overline{(3,1)}$ e $+3 = \overline{(5,2)}$. Então,
$$(+2) \cdot (+3) = \overline{(3,1)} \cdot \overline{(5,2)} = \overline{(3 \cdot 5 + 1 \cdot 2, 3 \cdot 2 + 1 \cdot 5)} = \overline{(17,11)} = +6;$$
- Dados $+3, -5 \in \mathbb{Z}$, tome $5, 2, 1, 6 \in \mathbb{N}$ tais que $+3 = \overline{(5,2)}$ e $-5 = \overline{(1,6)}$. Então,
$$(+3) \cdot (-5) = \overline{(5,2)} \cdot \overline{(1,6)} = \overline{(5 \cdot 1 + 2 \cdot 6, 5 \cdot 6 + 2 \cdot 1)} = \overline{(17,32)} = -15;$$
- Dados $0, +2 \in \mathbb{Z}$, tome $2, 3, 1 \in \mathbb{N}$ tais que $0 = \overline{(2,2)}$ e $+2 = \overline{(3,1)}$. Então,
$$0 \cdot (+2) = \overline{(2,2)} \cdot \overline{(3,1)} = \overline{(2 \cdot 3 + 2 \cdot 1, 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3)} = \overline{(8,8)} = 0.$$

A operação de multiplicação no conjunto dos números inteiros satisfaz às propriedades *comutativa, associativa* e *lei do corte*. Além disso, admite um *elemento neutro* e a *distributividade*, como mostrado na Proposição 4.4.

Proposição 4.4 Para todo $r, s, t \in \mathbb{Z}$, verificam-se as seguintes propriedades:

M1) $r\cdot s=s\cdot r$; (Comutatividade);
M2) $(r\cdot s)\cdot t=r\cdot(s\cdot t)$; (Associatividade);
M3) Existe $+1\in\mathbb{Z}$, tal que $r\cdot(+1)=r$ (Elemento neutro da multiplicação);
M4) $(r+s)\cdot t=r\cdot t+s\cdot t$ (Distributividade);
M5) Se $t\neq 0$ e $r\cdot t=s\cdot t$, então $r=s$.

Demonstração: Para demonstração, tomamos $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{N}$ tais que $r=\overline{(a,b)}, s=\overline{(c,d)}$ e $t=\overline{(e,f)}$. Assim, temos:

M1) Usando a comutatividade da adição e da multiplicação sobre $\mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} r\cdot s &= \overline{(a,b)}\cdot\overline{(c,d)}\\ &= \overline{(a\cdot c+b\cdot d,a\cdot d+c\cdot b)}\\ &= \overline{(c\cdot a+d\cdot b,c\cdot b+a\cdot d)}\\ &= \overline{(c,d)}\cdot\overline{(a,b)}=s\cdot r \end{aligned}$$

M2) Usando a distributividade da multiplicação em relação à adição em $\mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} (r\cdot s)\cdot t &= \left(\overline{(a,b)}\cdot\overline{(c,d)}\right)\cdot\overline{(e,f)}\\ &= \overline{(a\cdot c+b\cdot d,a\cdot d+c\cdot b)}\cdot\overline{(e,f)}\\ &= \overline{((a\cdot c+b\cdot d)\cdot e+(a\cdot d+c\cdot b)\cdot f,(a\cdot c+b\cdot d)\cdot f+e\cdot(a\cdot d+c\cdot b))}\\ &= \overline{(a\cdot c\cdot e+b\cdot d\cdot e+a\cdot d\cdot f+c\cdot b\cdot f,a\cdot c\cdot f+b\cdot d\cdot f+e\cdot a\cdot d+e\cdot c\cdot b)}\\ &= \overline{(a\cdot c\cdot e+a\cdot d\cdot f+b\cdot c\cdot f+b\cdot e\cdot d,a\cdot c\cdot f+a\cdot e\cdot d+c\cdot e\cdot b+d\cdot f\cdot b)}\\ &= \overline{(a\cdot(c\cdot e+d\cdot f)+b\cdot(c\cdot f+e\cdot d),a\cdot(c\cdot f+e\cdot d)+(c\cdot e+d\cdot f)\cdot b)}\\ &= \overline{(a,b)}\cdot(\overline{c\cdot e+d\cdot f,c\cdot f+e\cdot d})\\ &= \overline{(a,b)}\cdot\left(\overline{(c,d)}\cdot\overline{(e,f)}\right)=r\cdot(s\cdot t) \end{aligned}$$

M3) Por definição, $+1=\overline{(a+1,a)}$ para todo $a\in\mathbb{N}$. Em particular, temos $+1=\overline{(2,1)}$. Pela Proposição 2.8, temos $\overline{(2\cdot a+b,a+2\cdot b)}=\overline{(a,b)}$. Então, temos

$$\begin{aligned} r\cdot(+1) &= \overline{(a,b)}\cdot\overline{(2,1)}\\ &= \overline{(a\cdot 2+b\cdot 1,a\cdot 1+2\cdot b)}\\ &= \overline{(2a+b,a+2b)}\\ &= \overline{(a,b)}=r \end{aligned}$$

M4) Usando a distributividade da multiplicação em relação à adição em $\mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} (r+s)\cdot t &= \left(\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}\right)\cdot\overline{(e,f)}\\ &= \overline{(a+c,b+d)}\cdot\overline{(e,f)}\\ &= \overline{((a+c)\cdot e+(b+d)\cdot f,(a+c)\cdot f+e\cdot(b+d))}\\ &= \overline{(a\cdot e+c\cdot e+b\cdot f+d\cdot f,a\cdot f+c\cdot f+e\cdot b+e\cdot d)}\\ &= \overline{(a\cdot e+b\cdot f+c\cdot e+d\cdot f,a\cdot f+e\cdot b+c\cdot f+e\cdot d)}\\ &= \overline{(a\cdot e+b\cdot f,a\cdot f+e\cdot b)}+\overline{(c\cdot e+d\cdot f,c\cdot f+e\cdot d)}\\ &= \overline{(a,b)}\cdot\overline{(e,f)}+\overline{(c,d)}\cdot\overline{(e,f)}=r\cdot t+s\cdot t \end{aligned}$$

M5) Exercício.

A partir da definição e das proposições 4.2 e 4.4, pode-se mostrar as regras de sinais enunciadas abaixo.

Proposição 4.5 Dados $r, s \in \mathbb{Z}$, valem as seguintes regras de sinais:

i) $-(-r) = r$;
ii) $(-r) \cdot s = -(r \cdot s)$;
iii) $r \cdot (-s) = -(r \cdot s)$;
iv) $(-r) \cdot (-s) = r \cdot s$.

Demonstração: Para demonstração, tomamos $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tais que $r = \overline{(a,b)}$ e $s = \overline{(c,d)}$.

i) $-(-r) = -(-\overline{(a,b)}) = -\overline{(b,a)} = \overline{(a,b)} = r$;
ii) Exercício;
iii) Exercício;
iv) Usando a definição, temos

$$\begin{aligned}
(-r) \cdot (-s) &= \left(-\overline{(a,b)}\right) \cdot \left(-\overline{(c,d)}\right) \\
&= \overline{(b,a)} \cdot \overline{(d,c)} \\
&= \overline{(b \cdot d + a \cdot c, b \cdot c + d \cdot a)} \\
&= \overline{(a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + c \cdot b)} \\
&= \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = r \cdot s.
\end{aligned}$$

Proposição 4.6 Se $r \cdot s = 0$, então $r = 0$ ou $s = 0$.

Demonstração: Exercício.

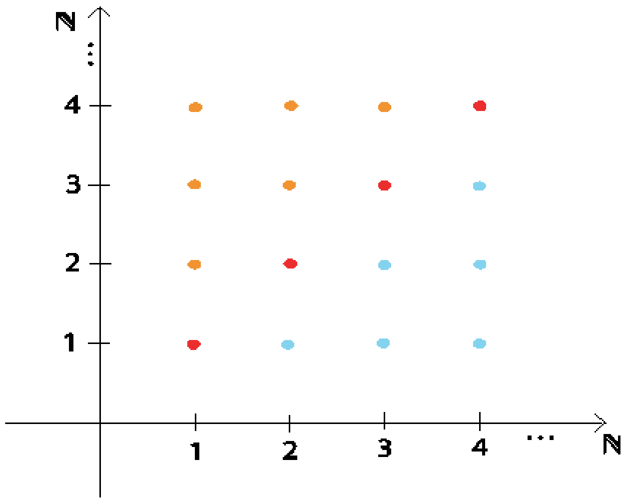


Figura 4.1: *Representação geométrica dos inteiros no plano*

Na figura 4.1 podemos ter uma ideia dos números inteiros no plano. No plano cartesiano, a classe dos números inteiros positivos são os pontos da cor azul, ou seja, são todos pontos (a,b), com $a > b$. A classe do zero, que representamos por 0, são os pontos de vermelho, ou seja, todos os pontos da forma (a,b), com $a = b$. E a classe dos números inteiros negativos são os pontos da cor laranja, isto é, todos os pontos (a,b), em que $a < b$. Vemos, assim, que os elementos de uma mesma classe estão sobre a mesma reta. Por exemplo, $+1 = \overline{(2,1)} = \{(2,1),(3,2),(4,3),(5,4),\ldots\}$.

4.5 Relações de Ordem nos Inteiros

Vamos agora definir uma relação de ordem no conjunto dos números inteiros. Essa relação deve permitir estabelecer a ordem de precedência entre os inteiros, da mesma forma como estabelecido para os naturais.

Definição 4.4 Dados $r,s \in \mathbb{Z}$, considere $a,b,c,d \in \mathbb{N}$ tais que $r = \overline{(a,b)}$ e $s = \overline{(c,d)}$. Dizemos que $r \leq s$ se, e somente se, $a+d \leq c+b$. A relação assim definida é chamada relação de precedência sobre $\mathbb{Z}$.

A definição acima usa o fato de que uma relação de precedência já é estabelecida para o conjunto dos números naturais. Então, para verificar se $r \leq s$, verificamos se $a+d \leq c+b$, pois $a+d, c+d \in \mathbb{N}$ e, portanto, são comparáveis.

Exemplo 4.7 Usando a definição, temos:

- Dados $+2,+3 \in \mathbb{Z}$, tome $3,1,5,2 \in \mathbb{N}$ tais que $+2 = \overline{(3,1)}$ e $+3 = \overline{(5,2)}$. Então,
$$(+2) \leq (+3), \quad pois \;\; 3+2 \leq 5+1;$$
- Dados $-5,+3 \in \mathbb{Z}$, tome $1,6,5,2 \in \mathbb{N}$ tais que $-5 = \overline{(1,6)}$ e $+3 = \overline{(5,2)}$. Então,
$$(-5) \leq (+3), \quad pois \;\; 1+2 \leq 5+6;$$
- Dados $-3,-2 \in \mathbb{Z}$, tome $2,5,1,3 \in \mathbb{N}$ tais que $-3 = \overline{(2,5)}$ e $-2 = \overline{(1,3)}$. Então,
$$(-3) \leq (-2), \quad pois \;\; 2+3 \leq 1+5.$$

Como nos naturais, a relação de precedência nos inteiros é relação de ordem, ou seja é reflexiva, antissimétrica e transitiva, como mostramos na proposição 4.7.

Proposição 4.7 A relação de precedência sobre $\mathbb{Z}$ é uma relação de ordem.

Demonstração: Dados $r,s,t \in \mathbb{Z}$, tomamos $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{N}$ tais que $r = \overline{(a,b)}, s = \overline{(c,d)}$ e $t = \overline{(e,f)}$. Assim, temos:

i) Sendo $r = \overline{(a,b)}$, temos $a+b \leq a+b$. Portanto $r \leq r$; (Reflexiva)
ii) Supondo $r \leq s$ e $s \leq r$ temos, por definição, $a+d \leq c+b$ e também $c+b \leq a+d$. Usando a antissimetria na precedência entre naturais, temos que $a+d = c+b$ e, portanto, $\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)}$, ou seja, $r = s$; (Antissimétrica)
iii) Suponha que $r \leq s$ e $s \leq t$. Então temos $a+d \leq c+b$ e $c+f \leq e+d$. Disso, temos $(a+d)+(c+f) \leq (c+b)+(e+d)$, ou seja, $(a+f)+(c+d) \leq (e+b)+(c+d)$. Pela lei do corte nos naturais temos, $a+f \leq e+b$, donde $r \leq t$. (Transitiva)

Dados $r,s \in \mathbb{Z}$, com $r = \overline{(a,b)}$ e $s = \overline{(c,d)}$. Se $r \leq s$, temos $a+d \leq c+b$, donde $a+d = c+b$ ou $a+d < c+b$. Se for $a+d = c+b$, temos $r = s$. No segundo caso, escrevemos $r < s$ e dizemos que *r é estritamente menor que s*. Então, $r \leq s$ significa $r = s$ ou $r < s$.

Como no caso dos números naturais, a relação de precedência é uma relação de ordem total, ou seja, todos os elementos de $\mathbb{Z}$ são comparáveis, conforme mostrado na proposição abaixo.

Proposição 4.8 A relação de ordem $\leq$ em $\mathbb{Z}$ satisfaz as seguintes propriedades:

a) Se $r \leq s$, então $r+p \leq s+p$, para todo $r,s,p \in \mathbb{Z}$ (Monotonicidade da Adição);
b) Todos os elementos de $\mathbb{Z}$ são comparáveis, ou seja, dados $r,s \in \mathbb{Z}$, vale $r \leq s$ ou $s \leq r$;
c) Dados $r,s \in \mathbb{Z}$, ocorrerá sempre uma das possibilidades: $r = s$, $r < s$ ou $s < r$ (Tricotomia).

Demonstração: Considere $a,b,c,d \in \mathbb{N}$ tais que $r = \overline{(a,b)}$ e $s = \overline{(c,d)}$. Então, temos

a) Se $r \leq s$, vale $a+d \leq b+c$. Supondo $p = \overline{(e,f)}$, temos que

$$\begin{aligned} a+d \leq b+c &\Rightarrow (a+d)+(e+f) \leq (b+c)+(e+f) \\ &\Rightarrow (a+e)+(d+f) \leq (c+e)+(b+f) \\ &\Rightarrow \overline{(a+e,b+f)} \leq \overline{(c+e,d+f)} \\ &\Rightarrow \overline{(a,b)}+\overline{(e,f)} \leq \overline{(c,d)}+\overline{(e,f)} \\ &\Rightarrow r+p \leq s+p \end{aligned}$$

b) Exercício.
c) Exercício.

Como a relação de precedência no conjunto dos números inteiros é uma relação de ordem total, e observando que $r \leq s$ significa $r = s$ ou $r < s$, podemos então escrever

$$\cdots < -3 < -2 < -1 < 0 < +1 < +2 < +3 < \cdots$$

Deve-se observar que a definição dos números inteiros como uma *classe de equivalência* torna os inteiros objetos de natureza diferente dos naturais, o que impede a inclusão $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Por outro lado, é possível associar cada natural $n \in \mathbb{N}$ a um número inteiro positivo dado por $+n = \overline{(1+n,1)}$. Dessa forma, haverá uma relação biunívoca entre o conjunto $\mathbb{N}$ e o conjunto dos números inteiros positivos. Indicando por $\hat{\mathbb{N}}$ o conjunto dos inteiros positivos e observando que esse conjunto preserva as propriedades aritméticas e a ordem de $\mathbb{N}$, dizemos que $\hat{\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ é uma cópia algébrica de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$. No que segue, usaremos indistintamente $\mathbb{N}$ e $\hat{\mathbb{N}}$, de forma que admitimos a inclusão $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, considerando $\mathbb{N}$ a cópia algébrica dos naturais nos inteiros.

Continuaremos indicando o inteiro negativo associado a $k \in \mathbb{N}$ por $-k \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, o número positivo associado a $k \in \mathbb{N}$, indicado por $+k \in \mathbb{Z}$ será indicado também por $k \in \mathbb{Z}$.

4.6 Divisão Euclidiana

Não se define uma divisão exata entre elementos do conjunto dos números inteiros, mas o algoritmo da *Divisão Euclidiana* estabelece uma divisão com resto para inteiros [3].

Pela Divisão Euclidiana, dados $a,b \in \mathbb{Z}$, com $b > 0$, consideramos duas únicas possibilidades:

i) Existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $a = m \cdot b$;
ii) Não existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $a = m \cdot b$.

No primeiro caso, dizemos que a é *múltiplo* de b, ou que b é *divisor* de a. No segundo caso, a não é múltiplo de b, e está entre dois múltiplos de b, ou seja, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m \cdot b < a < (m+1) \cdot b$$

De $m \cdot b < a < (m+1) \cdot b$, observamos que $0 < a - m \cdot b < b$. Fazendo então $r = a - m \cdot b$, temos que $a = m \cdot b + r$, com $0 < r < b$. Dessa forma, as possibilidades (i) e (ii) acima podem ser reescritas como:

i) Existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $a = m \cdot b$;
ii) Existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $a = m \cdot b + r$, com $0 < r < b$.

Finalmente, admitindo $0 \leq r < b$, temos uma única possibilidade, enunciada como *Algoritmo da Divisão Euclidiana*:

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b > 0$, existem $m, r \in \mathbb{Z}$, com $0 \leq r < b$, tais que

$$a = m \cdot b + r.$$

Exemplo 4.8 Alguns exemplos:

Dados $11, 4 \in \mathbb{Z}$, existem $2, 3 \in \mathbb{Z}$ tais que $11 = 2 \cdot 4 + 3$;

Dados $9, 2 \in \mathbb{Z}$, existem $4, 1 \in \mathbb{Z}$ tais que $9 = 4 \cdot 2 + 1$;

Dados $6, 3 \in \mathbb{Z}$, existem $2, 0 \in \mathbb{Z}$ tais que $6 = 2 \cdot 3 + 0$;

Dados $-7, 3 \in \mathbb{Z}$, existem $-3, 2 \in \mathbb{Z}$ tais que $-7 = (-3) \cdot 3 + 2$.

Definição 4.5 Dado um número inteiro a, dizemos que a é *par* se a Divisão Euclidiana de a por 2 deixa resto $r = 0$, ou seja, $a = 2 \cdot m$ para algum $m \in \mathbb{Z}$. Dizemos que a é *ímpar* se a Divisão Euclidiana de a por 2 tem resto $r = 1$, ou seja, $a = 2 \cdot m + 1$ para algum $m \in \mathbb{Z}$.

4.7 O Conjunto dos Números Inteiros é Enumerável

Nesta seção, vamos mostrar que os elementos do conjunto $\mathbb{Z}$ podem ser enumerados, ou seja, podemos estabelecer uma função bijetiva de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{N}$. Dessa forma, concluiremos que $\mathbb{Z}$ é um conjunto enumerável. Observe a Figura 4.2.

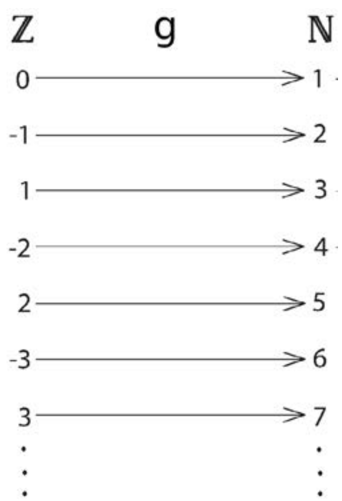


Figura 4.2: *O conjunto dos números inteiros é enumerável*

No diagrama de flechas acima, observamos que existe uma função bijetiva que associa a cada número inteiro um único número natural. Essa associação é feita pela função $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, tal que:

$$g(r) = \begin{cases} 1, & se\ r = 0 \\ 2 \cdot k, & se\ existe\ k \in \mathbb{N}\ tal\ que\ r = (-k) \\ 2 \cdot k + 1, & se\ existe\ k \in \mathbb{N}\ tal\ que\ r = (+k) \end{cases} \tag{4.1}$$

Com efeito, g é injetiva pois, se $g(r) = g(s)$, teremos então que $g(r) = g(s) = 1$ ou $g(r) = g(s) = 2 \cdot k$ ou $g(r) = g(s) = 2 \cdot k + 1$. No primeiro caso, teríamos $r = s = 0$. No segundo caso, teríamos $r = s = -k$ e, no terceiro caso, teríamos $r = s = +k$. De qualquer sorte, $r = s$, donde g é injetiva. Além disso, é fácil perceber que g é sobrejetiva. Portanto, g é bijetiva, donde concluímos que o conjunto $\mathbb{Z}$ é enumerável.

5. Números Racionais

5.1 Introdução

Neste Capítulo vamos, estudar o Conjunto dos Números Racionais, representado pelo símbolo $\mathbb{Q}$. Enquanto os números inteiros representam o resultado de uma compensação, ou diferença, entre naturais, os racionais representarão o resultado de uma razão, ou divisão, entre inteiros. Quando um todo, que pode ser um terreno ou volume de grãos, é dividido em n partes iguais, cada parte recebe nome de *meio* se $n = 2$, *terço* se $n = 3$, *quarto* se $n = 4$, e assim sucessivamente. Nesse caso, as transações comerciais não precisavam ser feitas em termos do todo, mas eram feitas em termo das partes do todo. Por exemplo, um comerciante pode vender 2 *terços* de um saco de grãos para um cliente e vender 2 *quartos* de um saco de grãos para outro cliente. Essencialmente, as quantidades de grãos consideradas dependem não apenas do número inteiro de partes tomadas, 2, mas também do número inteiro de partes em que o todo foi dividido, 3 ou 4. Essa forma de registro de quantidades, que depende de dois inteiros, expressa quantidades que não podem ser representadas pelos elementos do conjunto dos números inteiros.

Na prática, a necessidade de se registrar a quantidade de partes tomadas em relação ao total de partes de um todo levou ao conceito de *divisão*, que não é uma operação possível entre todos os pares de números inteiros. Por exemplo, divisão de 6 por 3, indica tomar 6 partes de um todo separado em 3 partes, que equivale a tomar o todo 2 vezes. Por outro lado, a divisão de 3 por 5, por exemplo, indica tomar 3 partes de um todo separado em 5 partes e, nesse caso, não é possível representar o resultado por um número inteiro e, portanto, esse resultado fica indicada pelo par de inteiros $(3,5)$, onde o primeiro, 3, indica a quantidade de partes tomadas e o segundo, 5, indica a quantidade de partes iguais em que o todo foi dividido. Note ainda que tomar 1 *meio* de um saco de grãos, ou tomar 2 *quartos* do mesmo saco de grãos, implica a mesma quantidade de grãos, ou seja, os pares $(1,2)$ e $(2,4)$ representam a mesma quantidade.

Como conhecemos hoje, cada número racional pode ser representado por dois inteiros, ou um par (a,b), onde a representa o número de partes tomadas, ou *dividendo*, e b representa o número de partes em que o todo foi separado, ou *divisor*. Esse par representa a divisão $a \div b$, que pode ser indicada pelo racional $q = a \div b$. Se outro par (c,d) define a mesma divisão, $q = c \div d = a \div b$, então esse par é indicado pelo mesmo racional q. Portanto, um mesmo número racional pode ser definido pela divisão entre pares distintos. Como não podemos usar a notação $a \div b$, com $a, b \in \mathbb{Z}$, usamos o fato conhecido de que $a \div b = c \div d \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

e dizemos que (a,b) e (c,d) definem o mesmo número racional se $a \cdot d = c \cdot b$. Dessa forma, usaremos apenas *multiplicação* entre números inteiros para definir a classe de equivalência que dá origem aos números racionais.

5.2 Definição Formal de Número Racional

Cada número racional será definido formalmente a partir de um par de números inteiros (a,b) com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Aqui, o conjunto Z^* é dado por $Z^* = \{r \in \mathbb{Z}; r \neq 0\}$. Mais precisamente, cada número racional será associado a um conjunto de pares de números inteiros, ditos pares equivalentes, que representam o mesmo número racional. Para estabelecer a equivalência entre tais pares de inteiros que representam o mesmo racional, consideramos a relação $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, dada por $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ que, como mostrado na Proposição 5.1, é uma relação de equivalência.

Exemplo 5.1 Temos que:

- $(2,3)R(4,6)$, pois $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$;
- $(3,-2)R(-6,4)$, pois $3 \cdot 4 = (-2) \cdot (-6)$.

Proposição 5.1 A relação $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, dada por $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$, é uma relação de equivalência.

Demonstração: Mostremos que R é reflexiva, simétrica e transitiva:

i) $\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, temos $(a,b)R(a,b)$, pois $a \cdot b = b \cdot a$. (Reflexiva)
ii) $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, temos que, se $(a,b)R(c,d)$, vale $a \cdot d = b \cdot c$, ou seja, $b \cdot c = a \cdot d$. Então, por comutatividade, temos $c \cdot b = d \cdot a$ e, portanto, $(c,d)R(a,b)$. (Simétrica)
iii) $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, temos que, se $(a,b)R(c,d)$ e $(c,d)R(e,f)$, vale $a \cdot d = b \cdot c$ e $c \cdot f = d \cdot e$. Então, temos que $a \cdot d \cdot f = b \cdot c \cdot f$ e $b \cdot c \cdot f = b \cdot d \cdot e$. Por transitividade, temos $a \cdot d \cdot f = b \cdot d \cdot e$, que implica $a \cdot f \cdot d = b \cdot e \cdot d$. Como $d \neq 0$, temos, pela Lei do Corte, que $a \cdot f = b \cdot e$. Portanto, $(a,b)R(e,f)$. (Transitiva)

Por *i*), *ii*) e *iii*), concluímos que a relação R é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

Assim como na definição dos números inteiros, a relação R particiona o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ em subconjuntos de pares que são equivalentes. Essa partição estabelece que cada par de inteiros pertence a um, e apenas um, subconjunto definido pela relação R. Cada subconjunto de pares equivalentes define uma classe, que pode ser representada por um dos seus elementos.

Exemplo 5.2 Os pares $(1,3),(4,6) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ determinam as seguintes classes:

- $\overline{(1,3)} = \{(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid 1 \cdot d = 3 \cdot c\} = \{\dots,(-2,-6),(-1,-3),(1,3),(2,6),\dots\}$;
- $\overline{(4,6)} = \{(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid 4 \cdot d = 6 \cdot c\} = \{\dots,(-4,-6),(-2,-3),(2,3),(4,6),\dots\}$.

Temos então uma partição de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ em classes definidas por R. Essa partição, chamada conjunto quociente, é indicada por $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/R$. O conjunto dos números racionais será esse quociente, ou seja, o conjunto das classes de equivalência, de forma que cada número racional será definido como sendo uma dessas classes.

Nota 5.1 Cada par ordenado $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ será também indicado pela notação $\dfrac{a}{b}$, chamada fração de inteiros, onde a é o *numerador* e b é o *denominador*. Da mesma forma, cada classe $\overline{(a,b)} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ será também indicada pela notação $\left[\frac{a}{b}\right]$. Não se confunde a classe $\left[\frac{a}{b}\right]$ com a fração $\frac{a}{b}$. De fato, cada classe $\left[\frac{a}{b}\right]$ é associada a um conjunto de frações equivalentes da forma $\frac{c}{d}$ tais que $a \cdot d = b \cdot c$.

Exemplo 5.3 As frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$, por exemplo, são frações diferentes, por terem numeradores e denominadores diferentes. Entretanto, as classes $\left[\frac{2}{3}\right]$ e $\left[\frac{4}{6}\right]$ são iguais, e podemos escrever:

- $\left[\frac{2}{3}\right] = \left\{\dots, \frac{-4}{-6}, \frac{-2}{-3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \dots\right\}$;
- $\left[\frac{4}{6}\right] = \left\{\dots, \frac{-4}{-6}, \frac{-2}{-3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \dots\right\}$.

Nota 5.2 Entre as frações que pertencem a uma classe $\left[\frac{a}{b}\right]$, chamamos *fração irredutível* àquela que tem o menor denominador positivo. Pelo princípio do menor inteiro, é única a fração irredutível para cada classe. Por exemplo:

- A classe $\left[\frac{8}{6}\right] = \left\{\dots, \frac{-8}{-6}, \frac{-4}{-3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{6}, \dots\right\}$, tem a fração irredutível $\frac{4}{3}$.
- A classe $\left[\frac{9}{-6}\right] = \left\{\dots, \frac{-9}{6}, \frac{-3}{2}, \frac{3}{-2}, \frac{9}{-6}, \dots\right\}$, tem a fração irredutível $\frac{-3}{2}$.

Definição 5.1 Definimos o conjunto dos **Números Racionais** como $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/R$, ou seja,

$$\mathbb{Q} = \{\overline{(a,b)} \mid (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\}$$

Cada número racional $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Q}$ será indicado também pelo símbolo $\left[\frac{a}{b}\right]$.

A partir da definição, consideramos cada número racional como um conjunto de frações equivalentes e, dessa forma, qualquer elemento desse conjunto pode ser tomado como representante da classe. Além disso, pela Proposição 2.8, vale $\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{c}{d}\right] \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$.

Exemplo 5.4 O número racional $\left[\frac{3}{2}\right]$ determina o conjunto de frações equivalentes dado por $\left[\frac{3}{2}\right] = \left\{\dots, \frac{-6}{-4}, \frac{-3}{-2}, \frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \dots\right\}$. Portanto, ainda que as frações do conjunto sejam diferentes entre si, cada uma delas determina o mesmo número racional, ou seja,

$$\dots = \left[\frac{-6}{-4}\right] = \left[\frac{-3}{-2}\right] = \left[\frac{3}{2}\right] = \left[\frac{6}{4}\right] = \dots$$

Como discutido na Introdução, tomar 3 partes de um todo dividido em 5 partes iguais equivale a tomar 6 partes de um todo dividido em 10 partes iguais. Com a definição de número racional, esse fato se escreve como

$$\left[\frac{3}{5}\right] = \left[\frac{6}{10}\right].$$

A igualdade acima se verifica observando que $3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$.

5.3 Adição com Números Racionais

Cada número racional pode ser representado por um conjunto de pares equivalentes de inteiros. Dessa forma, a definição de adição entre racionais deve considerar que a soma obtida seja a mesma, independentemente do par escolhido para representar cada racional.

Definição 5.2 Dados $p,q \in \mathbb{Q}$, considere $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ tais que $p = \left[\frac{a}{b}\right]$ e $q = \left[\frac{c}{d}\right]$. A soma $p+q$ é definida pela operação de *Adição* sobre o conjunto dos racionais, dada pela função $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, onde

$$f(p,q) = p+q = \left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}\right].$$

Exemplo 5.5 Usando a definição, temos:

- Dados $\left[\frac{3}{2}\right], \left[\frac{4}{3}\right] \in \mathbb{Q}$, temos $\left[\frac{3}{2}\right] + \left[\frac{4}{3}\right] = \left[\frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{2 \cdot 3}\right] = \left[\frac{17}{6}\right]$
- Dados $\left[\frac{-5}{4}\right], \left[\frac{3}{-2}\right] \in \mathbb{Q}$, temos $\left[\frac{-5}{4}\right] + \left[\frac{3}{-2}\right] = \left[\frac{(-5) \cdot (-2) + 4 \cdot 3}{4 \cdot (-2)}\right] = \left[\frac{22}{-8}\right]$
- Dados $\left[\frac{4}{1}\right], \left[\frac{3}{1}\right] \in \mathbb{Q}$, temos $\left[\frac{4}{1}\right] + \left[\frac{3}{1}\right] = \left[\frac{4 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{1 \cdot 1}\right] = \left[\frac{7}{1}\right]$
- Dados $\left[\frac{0}{1}\right], \left[\frac{3}{2}\right] \in \mathbb{Q}$, temos $\left[\frac{0}{1}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] = \left[\frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{1 \cdot 2}\right] = \left[\frac{3}{2}\right]$

Proposição 5.2 Se $\left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{e}{f}\right]$, então $\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{e}{f}\right]$. Ou seja, o resultado da adição independe dos representantes que se toma para cada racional.

Demonstração: Como $\left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{e}{f}\right]$, então temos

$$\begin{aligned}
c \cdot f &= d \cdot e \\
b \cdot b \cdot c \cdot f &= b \cdot b \cdot d \cdot e \\
b \cdot c \cdot b \cdot f &= b \cdot d \cdot b \cdot e \\
a \cdot d \cdot b \cdot f + b \cdot c \cdot b \cdot f &= a \cdot d \cdot b \cdot f + b \cdot d \cdot b \cdot e \\
(a \cdot d + b \cdot c) \cdot (b \cdot f) &= (b \cdot d) \cdot (a \cdot f + b \cdot e) \\
\left[\frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}\right] &= \left[\frac{a \cdot f + b \cdot e}{b \cdot f}\right] \\
\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{c}{d}\right] &= \left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{e}{f}\right]
\end{aligned}$$

Exemplo 5.6 Temos que $\left[\frac{4}{3}\right] = \left[\frac{8}{6}\right]$, pois $4 \cdot 6 = 3 \cdot 8$. Então, $\left[\frac{3}{2}\right] + \left[\frac{4}{3}\right] = \left[\frac{3}{2}\right] + \left[\frac{8}{6}\right]$. De fato, temos

- $\left[\dfrac{3}{2}\right] + \left[\dfrac{4}{3}\right] = \left[\dfrac{3\cdot 3 + 2\cdot 4}{2\cdot 3}\right] = \left[\dfrac{17}{6}\right]$
- $\left[\dfrac{3}{2}\right] + \left[\dfrac{8}{6}\right] = \left[\dfrac{3\cdot 6 + 2\cdot 8}{2\cdot 6}\right] = \left[\dfrac{34}{12}\right]$

Como $17 \cdot 12 = 6 \cdot 34$, temos $\left[\dfrac{17}{6}\right] = \left[\dfrac{34}{12}\right]$. Portanto, $\left[\dfrac{3}{2}\right] + \left[\dfrac{4}{3}\right] = \left[\dfrac{3}{2}\right] + \left[\dfrac{8}{6}\right]$

A adição no conjunto dos números racionais satisfaz às propriedades *comutativa, associativa* e *lei do corte*. Além disso, admite um *elemento neutro* e, para cada racional, existe um *elemento simétrico*, como mostrado na Proposição 5.3.

Proposição 5.3 Para todo $p,q,r \in \mathbb{Q}$, verificam-se as seguintes propriedades:

S1) $p+q = q+p$; (Comutatividade)
S2) $(p+q)+r = p+(q+r)$; (Associatividade)
S3) Existe $e = \left[\dfrac{0}{1}\right] \in \mathbb{Q}$, tal que $p+e = p$; (Elemento neutro da adição)
S4) Existe $p' \in \mathbb{Q}$, tal que $p+p' = e$; (Simétrico Aditivo)
S5) Se $p+q = p+r$, então $q = r$. (Lei do Corte)

Demonstração: Tomemos $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{Z}$ tais que $p = \left[\dfrac{a}{b}\right], q = \left[\dfrac{c}{d}\right]$ e $r = \left[\dfrac{e}{f}\right]$. Dessa forma, temos:

S1) Como a adição e multiplicação são comutativas em $\mathbb{Z}$, temos

$$\begin{aligned} p+q &= \left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{c}{d}\right] \\ &= \left[\frac{a\cdot d + b\cdot c}{b\cdot d}\right] \\ &= \left[\frac{c\cdot b + d\cdot a}{d\cdot b}\right] \\ &= \left[\frac{c}{d}\right] + \left[\frac{a}{b}\right] = q+p \end{aligned}$$

S2) Usando a associatividade e distributividade da multiplicação em $\mathbb{Z}$, temos

$$\begin{aligned} (p+q)+r &= \left(\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{c}{d}\right]\right) + \left[\frac{e}{f}\right] \\ &= \left[\frac{a\cdot d + b\cdot c}{b\cdot d}\right] + \left[\frac{e}{f}\right] \\ &= \left[\frac{(a\cdot d + b\cdot c)\cdot f + (b\cdot d)\cdot e}{(b\cdot d)\cdot f}\right] \\ &= \left[\frac{a\cdot d\cdot f + b\cdot c\cdot f + b\cdot d\cdot e}{b\cdot d\cdot f}\right] \\ &= \left[\frac{a\cdot (d\cdot f) + b\cdot (c\cdot f + d\cdot e)}{b\cdot (d\cdot f)}\right] \\ &= \left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{c\cdot f + d\cdot e}{d\cdot f}\right] \\ &= \left[\frac{a}{b}\right] + \left(\left[\frac{c}{d}\right] + \left[\frac{e}{f}\right]\right) = p+(q+r) \end{aligned}$$

S3) Como $(0,1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, existe a classe $\overline{(0,1)} = \{\ldots,(0,-2),(0,-1),(0,1),(0,2),\ldots\} \in \mathbb{Q}$ que indicamos por $\left[\dfrac{0}{1}\right] \in \mathbb{Q}$. Então, tomando $e = \left[\dfrac{0}{1}\right]$, temos

$$p + e = \left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{0}{1}\right] = \left[\frac{a \cdot 1 + b \cdot 0}{b \cdot 1}\right] = \left[\frac{a}{b}\right] = p$$

S4) Note que, para todo $x \in \mathbb{Z}^*$, vale $\left[\dfrac{0}{x}\right] = \left[\dfrac{0}{1}\right]$, pois $0 \cdot 1 = x \cdot 0$. Dado $p = \left[\dfrac{a}{b}\right]$, tome então $p' = \left[\dfrac{-a}{b}\right]$ e temos que

$$p + p' = \left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{-a}{b}\right] = \left[\frac{a \cdot b + b \cdot (-a)}{b \cdot b}\right] = \left[\frac{0}{b \cdot b}\right] = \left[\frac{0}{1}\right] = e.$$

S5) Basta verificar a recíproca da Proposição 5.2.

Nota 5.3 Assim, como no caso dos números inteiros, o simétrico aditivo p' será indicado por $-p$. Então, o racional $p = \left[\dfrac{a}{b}\right]$ tem simétrico $-p = -\left[\dfrac{a}{b}\right] = \left[\dfrac{-a}{b}\right]$ e escrevemos $p + (-p) = e$ para todo $p \in \mathbb{Q}$. O simétrico aditivo $-p$ é chamado *oposto* de p.

Proposição 5.4 Para todo $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, vale:

i) $\left[\dfrac{-a}{b}\right] = \left[\dfrac{a}{-b}\right]$;

ii) $\left[\dfrac{-a}{-b}\right] = \left[\dfrac{a}{b}\right]$.

Demonstração: De fato, pela Proposição 4.5, temos

i) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$;
ii) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b)$.

Como no caso dos números inteiros, a operação de *subtração* entre racionais é definida em termos de *adição*. De fato, toda subtração $p - q$ nos racionais será dada pela adição $p + (-q)$.

Exemplo 5.7 Dados $\left[\dfrac{3}{2}\right], \left[\dfrac{5}{4}\right] \in \mathbb{Q}$, temos

$$\left[\frac{3}{2}\right] - \left[\frac{5}{4}\right] = \left[\frac{3}{2}\right] + \left(-\left[\frac{5}{4}\right]\right) = \left[\frac{3}{2}\right] + \left[\frac{-5}{4}\right] = \left[\frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot (-5)}{2 \cdot 4}\right] = \left[\frac{2}{8}\right].$$

5.4 Multiplicação com Números Racionais

Nesta seção, definimos a multiplicação entre números racionais. Assim como no caso da adição, a multiplicação deve permitir que, independentemente do par que representa a classe, o produto resultante seja o mesmo.

Definição 5.3 Dados $p, q \in \mathbb{Q}$, considere $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tais que $p = \left[\dfrac{a}{b}\right]$ e $q = \left[\dfrac{c}{d}\right]$. O produto $p \cdot q$ é definido pela operação de *Multiplicação* sobre o conjunto dos números racionais, dada pela função $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, onde

$$f(p,q) = p \cdot q = \left[\frac{a}{b}\right] \cdot \left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right].$$

Exemplo 5.8 Usando a definição, temos:

- Dados $\left[\frac{2}{3}\right], \left[\frac{7}{5}\right] \in \mathbb{Q}$, temos $\left[\frac{2}{3}\right] \cdot \left[\frac{7}{5}\right] = \left[\frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5}\right] = \left[\frac{14}{15}\right]$.

- Dados $\left[\frac{-3}{4}\right], \left[\frac{5}{-2}\right] \in \mathbb{Q}$, temos $\left[\frac{-3}{4}\right] \cdot \left[\frac{5}{-2}\right] = \left[\frac{(-3) \cdot 5}{4 \cdot (-2)}\right] = \left[\frac{-15}{-8}\right] = \left[\frac{15}{8}\right]$.

- Dados $\left[\frac{4}{-3}\right], \left[\frac{2}{5}\right] \in \mathbb{Q}$, temos $\left[\frac{4}{-3}\right] \cdot \left[\frac{2}{5}\right] = \left[\frac{(4) \cdot 2}{(-3) \cdot 5}\right] = \left[\frac{8}{-15}\right] = -\left[\frac{8}{15}\right]$.

- Dados $\left[\frac{5}{3}\right], \left[\frac{0}{4}\right] \in \mathbb{Q}$, temos $\left[\frac{5}{3}\right] \cdot \left[\frac{0}{4}\right] = \left[\frac{5 \cdot 0}{3 \cdot 4}\right] = \left[\frac{0}{12}\right] = \left[\frac{0}{1}\right]$.

A proposição 5.5 estabelece que a operação de multiplicação no conjunto dos números racionais satisfaz às propriedades *comutativa, associativa, lei do corte* e *distributividade*. Além disso, admite um *elemento neutro* e, para cada racional diferente do neutro aditivo, admite um *elemento simétrico*.

Proposição 5.5 Para todo $p, q, r \in \mathbb{Q}$, verificam-se as seguintes propriedades:

M1) $p \cdot q = q \cdot p$; (Comutatividade)
M2) $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$; (Associatividade)
M3) Existe $i \in \mathbb{Q}$, tal que $p \cdot i = p$ (Elemento neutro da multiplicação);
M4) Se $p \neq \left[\frac{0}{1}\right]$, existe $p' \in \mathbb{Q}$, tal que $p \cdot p' = i$ (Elemento simétrico);
M5) $(p+q) \cdot r = p \cdot r + q \cdot r$ (Distributividade).
M6) Se $p \neq \left[\frac{0}{1}\right]$, então, $p \cdot q = p \cdot r \Rightarrow q = r$.

Demonstração: Para demonstração, tomamos $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ tais que $p = \left[\frac{a}{b}\right], q = \left[\frac{c}{d}\right]$ e $r = \left[\frac{e}{f}\right]$. Assim, temos:

M1) Basta usar a comutatividade nos inteiros;
M2) Basta usar a associatividade nos inteiros;
M3) Como $(1,1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, existe a classe $\overline{(1,1)} = \{\ldots, (-2,-2), (-1,-1), (1,1), (2,2), \ldots\} \in \mathbb{Q}$ que indicamos por $\left[\frac{1}{1}\right] \in \mathbb{Q}$. Então, tomando $i = \left[\frac{1}{1}\right]$, temos que

$$p \cdot i = \left[\frac{a}{b}\right] \cdot \left[\frac{1}{1}\right] = \left[\frac{a \cdot 1}{b \cdot 1}\right] = \left[\frac{a}{b}\right] = p$$

Portanto, $i = \left[\frac{1}{1}\right]$ é elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{Q}$.

M4) Como $p = \left[\frac{a}{b}\right] \neq \left[\frac{0}{1}\right]$, temos que $a \cdot 1 \neq b \cdot 0$, ou seja, $a \neq 0$ e, portanto, $\left[\frac{b}{a}\right] \in \mathbb{Q}$. Nesse caso, p tem simétrico, dado por $p' = \left[\frac{b}{a}\right]$. De fato,

$$p \cdot p' = \left[\frac{a}{b}\right] \cdot \left[\frac{b}{a}\right] = \left[\frac{a \cdot b}{b \cdot a}\right] = \left[\frac{a \cdot b}{a \cdot b}\right] = \left[\frac{1}{1}\right] = i$$

M5) Basta usar a distributividade nos inteiros.

M6) Se $p \neq \left[\frac{0}{1}\right]$, existe $p' \in \mathbb{Q}$ tal que $p \cdot p' = i$. Então, temos

$$p \cdot q = p \cdot r \Rightarrow p' \cdot p \cdot q = p' \cdot p \cdot r \Rightarrow i \cdot q = i \cdot r \Rightarrow q = r.$$

Enquanto o simétrico da adição é chamado *oposto*, o simétrico da multiplicação é chamado *inverso*. Assim como no caso dos inteiros, valem as seguintes regras de sinais para o conjunto dos racionais:

i) $-(-p) = p$;
ii) $(-p) \cdot q = -(p \cdot q)$;
iii) $(-p) \cdot (-q) = p \cdot q$.
iv) $p \cdot (-q) = -(p \cdot q)$;

5.5 Relações de Ordem nos Racionais

Uma relação de precedência entre os elementos do conjunto dos números racionais será definida nesta seção. Como no casos dos números naturais e inteiros, essa precedência estabelecerá uma relação de ordem total entre os elementos do conjunto dos racionais.

Definição 5.4 Dados $p, q \in \mathbb{Q}$, tome $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tais que $p = \left[\frac{a}{b}\right]$ e $q = \left[\frac{c}{d}\right]$. Dizemos que $p \leq q$ se, e somente se, $a \cdot d \leq b \cdot c$. Essa relação é chamada relação de precedência sobre $\mathbb{Q}$.

Pela definição acima, ao verificar se $a \cdot d \leq b \cdot c$, usamos o fato de que $a \cdot d$ e $b \cdot c$ são números inteiros e, portanto, são comparáveis pela relação de precedência já estabelecida para o conjunto dos inteiros.

Exemplo 5.9 Usando a definição, temos:

- Dados $\left[\frac{5}{3}\right], \left[\frac{7}{5}\right] \in \mathbb{Q}$, temos $\left[\frac{7}{5}\right] \leq \left[\frac{5}{3}\right]$, *pois* $7 \cdot 3 \leq 5 \cdot 5$;

- Dados $\left[\frac{-3}{5}\right], \left[\frac{2}{7}\right] \in \mathbb{Q}$, temos $\left[\frac{-3}{5}\right] \leq \left[\frac{2}{7}\right]$, *pois* $(-3) \cdot 7 \leq 5 \cdot 2$;

- Dados $\left[\frac{-4}{3}\right], \left[\frac{-8}{7}\right] \in \mathbb{Q}$, temos $\left[\frac{-4}{3}\right] \leq \left[\frac{-8}{7}\right]$, *pois* $(-4) \cdot 7 \leq 3 \cdot (-8)$.

A relação de precedência definida para os números racionais é uma relação de ordem, ou seja, é reflexiva, antissimétrica e transitiva, como mostramos na proposição 5.6.

Proposição 5.6 A relação de precedência sobre $\mathbb{Q}$ é uma relação de ordem.

Demonstração: Dados $p, q, r \in \mathbb{Q}$, considere $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$, com b, d e f positivos, tais que $p = \left[\frac{a}{b}\right], q = \left[\frac{c}{d}\right]$ e $r = \left[\frac{e}{f}\right]$. Temos que:

i) Usando a comutatividade da multiplicação e a ordem de precedência nos inteiros temos que, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, vale $a \cdot b \leq b \cdot a$. Então, $\left[\frac{a}{b}\right] \leq \left[\frac{a}{b}\right]$, ou seja, $p \leq p$. (Reflexiva)

ii) Supondo $p \leq q$ e $q \leq p$, temos $\left[\frac{a}{b}\right] \leq \left[\frac{c}{d}\right]$ e $\left[\frac{c}{d}\right] \leq \left[\frac{a}{b}\right]$ donde, por definição, $a \cdot d \leq b \cdot c$ e também $c \cdot b \leq d \cdot a$. Usando a antissimetria na precedência entre números inteiros, temos que $a \cdot d = b \cdot c$ e, portanto, $\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{c}{d}\right]$, ou seja, $p = q$. (Antissimétrica)

iii) Suponha que $p \leq q$ e $q \leq r$. Então temos $\left[\frac{a}{b}\right] \leq \left[\frac{c}{d}\right]$ e $\left[\frac{c}{d}\right] \leq \left[\frac{e}{f}\right]$ donde, por definição, $a \cdot d \leq b \cdot c$ e $c \cdot f \leq d \cdot e$. Disso, temos $a \cdot d \cdot f \leq b \cdot c \cdot f$ e $b \cdot c \cdot f \leq b \cdot d \cdot e$. Por transitividade, vale $a \cdot d \cdot f \leq b \cdot d \cdot e$. Como $d \neq 0$ temos, pela lei do corte nos inteiros, que $a \cdot f \leq b \cdot e$. Portanto, $p \leq r$. (Transitiva)

Dados $p, q \in \mathbb{Q}$, com $p = \left[\frac{a}{b}\right]$ e $q = \left[\frac{c}{d}\right]$, se $p \leq q$, temos $a \cdot d \leq b \cdot c$, donde $a \cdot d = b \cdot c$ ou $a \cdot d < b \cdot c$. Se for $a \cdot d = b \cdot c$, temos $p = q$. Se for $a \cdot d < b \cdot c$, escrevemos $p < q$ e dizemos que *p é estritamente menor que q*. Portanto, $p \leq q$ significa $p = q$ ou $p < q$.

Mostraremos agora que a relação de precedência nos números racionais é uma relação de ordem total, ou seja, todos os elementos de $\mathbb{Q}$ são comparáveis.

Proposição 5.7 A relação de ordem $\leq$ em $\mathbb{Q}$ satisfaz as seguintes propriedades:

a) Se $p \leq q$, então $p + r \leq q + r$, para todo $p, q, r \in \mathbb{Q}$ (Monotonicidade da Adição);
b) Todos os elementos de $\mathbb{Q}$ são comparáveis, ou seja, dados $p, q \in \mathbb{Q}$, vale $p \leq q$ ou $q \leq p$;
c) Dados $p, q \in \mathbb{Q}$, ocorrerá sempre uma das possibilidades: $p = q$, $p < q$ ou $q < p$ (Tricotomia).

Demonstração: Considere $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tais que $p = \left[\frac{a}{b}\right]$ e $q = \left[\frac{c}{d}\right]$. Então temos:

a) Supondo $r = \left[\frac{e}{f}\right]$, com $f > 0$, temos que

$$
\begin{aligned}
p \leq q \Rightarrow & \ a \cdot d \leq b \cdot c \\
& \Rightarrow a \cdot f \cdot d \cdot f \leq b \cdot f \cdot c \cdot f \\
& \Rightarrow a \cdot f \cdot d \cdot f + b \cdot e \cdot d \cdot f \leq b \cdot f \cdot c \cdot f + b \cdot f \cdot d \cdot e \\
& \Rightarrow (a \cdot f + b \cdot e) \cdot d \cdot f \leq b \cdot f \cdot (c \cdot f + d \cdot e) \\
& \Rightarrow \left[\frac{a \cdot f + b \cdot e}{b \cdot f}\right] \leq \left[\frac{c \cdot f + d \cdot e}{d \cdot f}\right] \\
& \Rightarrow \left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{e}{f}\right] \leq \left[\frac{c}{d}\right] + \left[\frac{e}{f}\right] \\
& \Rightarrow p + r \leq q + r
\end{aligned}
$$

b) Como $a \cdot d$ e $b \cdot c$ são números inteiros, vale $a \cdot d \leq b \cdot c$ ou $b \cdot c \leq a \cdot d$. Por definição, isso implica $\left[\frac{a}{b}\right] \leq \left[\frac{c}{d}\right]$ ou $\left[\frac{c}{d}\right] \leq \left[\frac{a}{b}\right]$, donde vale $p \leq q$ ou $q \leq p$.

c) Como $a \cdot d$ e $b \cdot c$ são números inteiros, vale $a \cdot d = b \cdot c$ ou $a \cdot d < b \cdot c$ ou $b \cdot c < a \cdot d$. Portanto, temos $\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{c}{d}\right]$ ou $\left[\frac{a}{b}\right] < \left[\frac{c}{d}\right]$ ou $\left[\frac{c}{d}\right] < \left[\frac{a}{b}\right]$. Então, vale $p = q$ ou $p < q$ ou $q < p$.

5.6 O Conjunto dos Números Racionais é Enumerável

Mostramos agora que o conjunto dos números racionais é enumerável. Como apresentamos no Capítulo 3, $\mathbb{Q}$ será enumerável se existir uma função injetiva de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{N}$. Mostraremos então a existência dessa função injetiva. Inicialmente, construímos uma enumeração dos elementos de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ exibindo uma função injetiva $F : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. A tabela abaixo ilustra essa enumeração.

$$
\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(1,5) & (2,5) \arrow[ul] & (3,5) \arrow[ul] & (4,5) \arrow[ul] & (5,5) \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul] \\
(1,4) & (2,4) \arrow[ul] & (3,4) \arrow[ul] & (4,4) \arrow[ul] & (5,4) \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul] \\
(1,3) & (2,3) \arrow[ul] & (3,3) \arrow[ul] & (4,3) \arrow[ul] & (5,3) \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul] \\
(1,2) & (2,2) \arrow[ul] & (3,2) \arrow[ul] & (4,2) \arrow[ul] & (5,2) \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul] \\
(1,1) & (2,1) \arrow[ul] & (3,1) \arrow[ul] & (4,1) \arrow[ul] & (5,1) \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

A enumeração indicada na tabela fornece a seguinte ordenação dos elementos de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

$$(1,1),(2,1),(1,2),(3,1),(2,2),(1,3),(4,1),(3,2),(2,3),(1,4),(5,1),(4,2),(3,3),(2,4),(1,5),\ldots$$

Essa enumeração, para os elementos do conjunto $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, é dada pela função $F : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, tal que $F(m,n) = k$, onde $k \in \mathbb{N}$ é tal que $2\cdot k = p\cdot(p+1)+2\cdot n$ e, por sua vez, $p \in \mathbb{N}$ é tal que $p+2 = m+n$.

Nota 5.4 Essa descrição indireta para função F visa evitar subtrações e divisão que não são definidas para os naturais. Numa linguagem mais direta, teríamos

$$F(m,n) = \frac{(m+n-2)\cdot(m+n-1)+2n}{2}.$$

Observe que F reproduz a enumeração indicada acima, ou seja, $f(1,1) = 1$, $f(2,4) = 14$, etc. Além disso, usando indução, podemos mostrar que F é injetiva. Consideramos agora a função injetiva $G : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, dada por

$$G(p,q) = (g(p),g(q)),$$

onde $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, dada pela Equação 4.1, é a bijeção definida para estabelecer a enumerabilidade dos números inteiros no Capítulo 4. Considere, por fim, a função injetiva $H : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ dada por

$$H(q) = (a,b), \ \ para\ algum\ \ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\ \ tal\ que\ \ q = \left[\frac{a}{b}\right].$$

Note que H não é sobrejetiva, pois, para cada $q \in \mathbb{Q}$, existem infinitos pares $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tais que $q = \left[\frac{a}{b}\right]$ e apenas um desses pares é escolhido como imagem de q. Por outro lado, H é injetiva, pois se $H(q) = H(p) = (a,b)$, então $q = \left[\frac{a}{b}\right] = p$, donde $q = p$. Finalmente, por composição, obtemos a seguinte cadeia de funções injetivas:

$$\mathbb{Q} \xrightarrow[H]{} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow[G]{} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow[F]{} \mathbb{N}$$

Tomando então $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$, com $f(q) = (F \circ G \circ H)(q)$, temos que f é uma função injetiva de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{N}$ e, portanto, conclui-se que $\mathbb{Q}$ é enumerável. Isso equivale a dizer que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais são suficientes para enumerar todos os números racionais.

Exemplo 5.10 Tomando $H(q) = (a,b)$, onde a e b são numerador e denominador da fração irredutível de q, temos:

- $f\left(\left[\frac{6}{9}\right]\right) = (F \circ G \circ H)\left(\left[\frac{6}{9}\right]\right) = F\left(G\left(H\left(\left[\frac{6}{9}\right]\right)\right)\right) = F(G(2,3)) = F(5,7) = 62;$
- $f\left(\left[\frac{8}{-6}\right]\right) = (F \circ G \circ H)\left(\left[\frac{8}{-6}\right]\right) = F\left(G\left(H\left(\left[\frac{8}{-6}\right]\right)\right)\right) = F(G(-4,3)) = F(8,7) = 98.$

Nota 5.5 É notável que essa função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ seja injetiva, ou seja, cada número natural é imagem de um único número racional. Além disso, f não é sobrejetiva, ou seja, todo número racional tem imagem exclusiva em $\mathbb{N}$, mas nem todo elemento de $\mathbb{N}$ chega a ser usado como imagem de algum racional.

A definição do conjunto $\mathbb{Q}$ torna cada número racional um conjunto de pares de números inteiros e, portanto, são objetos de natureza distinta dos próprios números inteiros, de forma que a inclusão $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ não é possível. Entretanto, é possível associar cada número inteiro $p \in \mathbb{Z}$ ao número racional $\left[\frac{p}{1}\right]$. Essa associação determina uma relação biunívoca entre o conjunto $\mathbb{Z}$ e o conjunto dos números racionais da forma $\left[\frac{p}{1}\right]$. Indicando por $\hat{\mathbb{Z}}$ o conjunto dos números racionais da forma $\left[\frac{p}{1}\right]$, observamos que esse conjunto preserva as propriedades aritméticas e a ordem de $\mathbb{Z}$. Dizemos então que $\hat{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Q}$ é uma cópia algébrica de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$. Essa associação nos permite usar, indistintamente, $\mathbb{Z}$ e $\hat{\mathbb{Z}}$, e escrever $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, considerando $\mathbb{Z}$ a cópia algébrica dos números inteiros dentro do conjunto dos racionais.

Por simplicidade de notação, o número racional $\left[\frac{a}{b}\right]$ é usualmente indicado pela fração $\frac{a}{b}$. Ao dizer que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, não estamos dizendo que as frações sejam iguais, mas que os números racionais determinados por elas é o mesmo. Também, por simplicidade de notação, a fração $\frac{p}{1}$ é indicada apenas pelo inteiro p.

5.7 Representação Decimal para Números Racionais

A partir desta Seção, o número racional $\left[\frac{a}{b}\right]$ será indicado também, por simplicidade, pela fração $\frac{a}{b}$, com $b > 0$. Nesse caso, $\frac{a}{b}$ indica toda uma classe de frações equivalentes.

Pelo *Algoritmo da Divisão Euclidiana*, que pode ser visto na Seção 4.6, dados $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b > 0$, existem inteiros m e r tais que $a = m \cdot b + r$, com $0 \leq r < b$. O inteiro m é chamado *quociente* e r é chamado *resto*. Nesse caso, a fração $\frac{a}{b}$ pode ser escrita como

$$\frac{a}{b} = m + \frac{r}{b}.$$

O número m é dito parte inteira. Se $0 < r < b$, diremos que $\frac{r}{b}$ é uma fração própria.

Exemplo 5.11 Alguns exemplos:

a) $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$;

b) $\frac{8}{2} = 4 + \frac{0}{2}$;

c) $\frac{3}{4} = 0 + \frac{3}{4}$;

d) $\frac{-7}{3} = -3 + \frac{2}{3}$.

A partir dessa decomposição, um número racional pode ser escrito como soma de um inteiro m com *frações decimais*, cujos denominares são potências de 10. Por exemplo, podemos escrever $\frac{19}{8}$ como

$$\begin{aligned}\frac{19}{8} &= 2 + \frac{3}{8} = 2 + \frac{30}{8} \cdot \frac{1}{10} = 2 + \left(3 + \frac{6}{8}\right) \cdot \frac{1}{10} = 2 + \frac{3}{10} + \left(\frac{60}{8}\right) \cdot \frac{1}{100} \\ &= 2 + \frac{3}{10} + \left(7 + \frac{4}{8}\right) \cdot \frac{1}{100} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \left(\frac{40}{8}\right) \cdot \frac{1}{1000} \\ &= 2 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \left(5 + \frac{0}{8}\right) \cdot \frac{1}{1000} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} + \left(\frac{0}{8}\right) \cdot \frac{1}{1000} \\ &= 2 + \frac{3}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{5}{10^3}.\end{aligned}$$

Veja que o surgimento do elemento neutro $\frac{0}{8}$ encerra o processo. Em algumas situações, entretanto, essa decomposição seguirá indefinidamente. Por exemplo, a fração $\frac{18}{11}$ tem a seguinte decomposição

$$\frac{18}{11} = 1 + \frac{7}{11} = 1 + \frac{70}{11} \cdot \frac{1}{10} = 1 + \left(6 + \frac{4}{11}\right) \cdot \frac{1}{10} = 1 + \frac{6}{10} + \left(\frac{40}{11}\right) \cdot \frac{1}{100}$$

$$= 1 + \frac{6}{10} + \left(3 + \frac{7}{11}\right) \cdot \frac{1}{100} = 1 + \frac{6}{10} + \frac{3}{100} + \left(\frac{70}{11}\right) \cdot \frac{1}{1000}$$

$$= 1 + \frac{6}{10} + \frac{3}{100} + \left(6 + \frac{4}{11}\right) \cdot \frac{1}{1000} = 1 + \frac{6}{10} + \frac{3}{100} + \frac{6}{1000} + \left(\frac{40}{11}\right) \cdot \frac{1}{10000}$$

$$= 1 + \frac{6}{10} + \frac{3}{100} + \frac{6}{1000} + \left(3 + \frac{7}{11}\right) \cdot \frac{1}{10000} = 1 + \frac{6}{10} + \frac{3}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{3}{10000} + \left(\frac{70}{11}\right) \cdot \frac{1}{100000}$$

$$= 1 + \frac{6}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \left(\frac{70}{11}\right) \cdot \frac{1}{10^5}$$

.

Enquanto no caso de $\frac{19}{8}$ chegamos ao elemento neutro $\frac{0}{8}$, que interrompe o processo, no caso de $\frac{18}{11}$ o elemento neutro não surge e, portanto, o processo segue indefinidamente, com somas de frações decimais com os algarismos 6 e 3 no numerador, alternadamente. Nesse caso, escrevemos

$$\frac{18}{11} = 1 + \frac{6}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \dots$$

e usamos reticências (...) para indicar que o processo segue indefinidamente. Na verdade, mesmo no caso da fração $\frac{19}{8}$, o processo poderia seguir indefinidamente de duas formas diferentes:

i) $\frac{19}{8} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{0}{10^4} + \frac{0}{10^5} + \frac{0}{10^6} + \frac{0}{10^7} + \dots;$

ii) $\frac{19}{8} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^6} + \dots.$

Definição 5.5 Considere o número racional q com a seguinte decomposição em somas de frações decimais

$$q = m + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

onde $m, a_i \in \mathbb{Z}$, com $0 \leq a_i \leq 9$. Chamamos *representação decimal* de q a notação

$$q = m, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$$

Nota 5.6 Quando $q = m, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$ com $a_i = 0$, para $i > n$, escrevemos apenas $q = m, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$, sem usar reticências.

Exemplo 5.12 Alguns exemplos de representação decimal:

- $\dfrac{19}{8} = 2 + \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10^2} + \dfrac{5}{10^3} = 2,375$

- $\dfrac{19}{8} = 2 + \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10^2} + \dfrac{4}{10^3} + \dfrac{9}{10^4} + \dfrac{9}{10^5} + \dfrac{9}{10^6} + \cdots = 2,374999\ldots$

- $\dfrac{7}{16} = 0 + \dfrac{4}{10} + \dfrac{3}{10^2} + \dfrac{7}{10^3} + \dfrac{5}{10^4} = 0,4375$

- $\dfrac{18}{11} = 1 + \dfrac{6}{10} + \dfrac{3}{10^2} + \dfrac{6}{10^3} + \dfrac{3}{10^4} + \cdots = 1,6363\ldots$

- $\dfrac{4}{7} = 0 + \dfrac{5}{10} + \dfrac{7}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} + \dfrac{4}{10^4} + \dfrac{2}{10^5} + \dfrac{8}{10^6} + \cdots = 0,571428\ldots$

Definição 5.6 Na representação decimal, a sequência de algarismos $a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$ é chamada *dízima*. Se a dízima apresenta um bloco de algarismos que se repete indefinidamente, ela é chamada *dízima periódica* e o tamanho do bloco é chamado *período*.

Para evitar repetições do bloco de algarismos da dízima periódica, usamos uma barra horizontal para identificar o bloco, como nos exemplos abaixo.

Exemplo 5.13 Exemplos de dízimas periódicas:

- $\dfrac{18}{11} = 1,636363\cdots = 1,6363\overline{63}$

- $\dfrac{4}{7} = 0,571428571428\cdots = 0,571428\overline{571428}$

- $\dfrac{19}{8} = 2,375 = 2,3749\overline{9}$

Um fato notável sobre os números racionais, conforme discutido em [11] e [12], é que sua representação decimal sempre resulta em dízimas periódicas. Esse fato é mostrado na Proposição 5.8.

Proposição 5.8 Para todo número racional $q = \dfrac{a}{b}$, sua representação decimal $q = m,a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$ resulta em uma dízima periódica e o tamanho do bloco periódico é menor ou igual que $b-1$.

Demonstração: Na decomposição de q como soma de frações decimais, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} = m + \frac{r}{b} &= m + \left(\frac{10 \cdot r}{b}\right) \cdot \frac{1}{10} \\
&= m + \frac{a_1}{10} + \left(\frac{10 \cdot r_1}{b}\right) \cdot \frac{1}{10^2} \\
&= m + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \left(\frac{10 \cdot r_2}{b}\right) \cdot \frac{1}{10^3} \\
&\vdots \\
&= m + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_i}{10^i} + \left(\frac{10 \cdot r_i}{b}\right) \cdot \frac{1}{10^{i+1}}
\end{aligned}
$$

Note que os números inteiros a_i e r_i são obtidos como quociente e resto na Divisão Euclidiana de $10 \cdot r_{i-1}$ por b. Como $0 \leq r_i < b$, temos apenas $b-1$ valores positivos para r_i e, portanto, apenas $b-1$ possibilidades para a_i. Além disso, cada r_i é determinado a partir de r_{i-1} e, portanto, a_i é determinado a partir de a_{i-1}. Então, os algarismos a_i aparecem sempre na mesma ordem e são em número máximo de $b-1$. Disso, concluímos que a representação decimal de q é uma dízima periódica com período máximo $b-1$.

Proposição 5.9 Para toda dízima periódica $m, a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots$, existe um número racional $\frac{a}{b}$ tal que $\frac{a}{b} = m, a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots$.

Demonstração: Exercício.

A proposição 5.8 traz um resultado importante e levanta um outro questionamento, tão ou mais importante, e que não pode ser respondido nesta seção:

"Se todo número racional é representado por uma dízima periódica, e as dízimas não periódicas? Que tipo de números representam?"

No próximo Capítulo, o conjunto dos números racionais é estendido para um conjunto que comporta números associados às dízimas não periódicas. Esses números, chamados irracionais, formarão junto com os racionais o conjunto dos números reais.

5.8 Representação Binária para Números Racionais

Assim como na representação decimal, que usa os 10 algarismos de 0 a 9, outras representações são possíveis usando outro conjunto de algarismos [13]. A representação binária, por exemplo, usa os algarismos 0 e 1 apenas para representar um número.

Usando sucessivas divisões por 2, um número racional pode ser escrito como soma de um inteiro com *frações binárias*, cujos denominares são potências de 2. Por exemplo, podemos escrever $\frac{5}{7}$ como

$$\frac{5}{7} = 0 + \frac{5}{7} = 0 + \frac{10}{7} \cdot \frac{1}{2} = 0 + \left(1 + \frac{3}{7}\right) \cdot \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} + \left(\frac{6}{7}\right) \cdot \frac{1}{2^2}$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + \left(0 + \frac{6}{7}\right) \cdot \frac{1}{2^2} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \left(\frac{12}{7}\right) \cdot \frac{1}{2^3} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \left(1 + \frac{5}{7}\right) \cdot \frac{1}{2^3}$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \left(\frac{5}{7}\right) \cdot \frac{1}{2^3} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \left(\frac{5}{7}\right) \cdot \frac{1}{2^3} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \left(\frac{10}{7}\right) \cdot \frac{1}{2^4}$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \left(1 + \frac{3}{7}\right) \cdot \frac{1}{2^4} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \left(\frac{6}{7}\right) \cdot \frac{1}{2^5}$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{0}{2^8} + \dots$$

Definição 5.7 Considere o número racional q, $0 \leq q \leq 1$, com a seguinte decomposição em somas de frações binárias

$$q = 0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} + \dots$$

onde $a_i \in \mathbb{Z}$, com $0 \leq a_i \leq 1$. Chamamos *representação binária* de q a notação

$$q = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$$

Exemplo 5.14 Alguns exemplos de representação binária:

a) $\frac{5}{7} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{0}{2^8} + \cdots = 0,1011011011\dots$

b) $\frac{7}{8} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = 0,111$

c) $\frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = 0,1$

d) $\frac{1}{2} = 0 + \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} + \cdots = 0,01111\dots$

Os exemplos (c) e (d) ilustram o fato de que, como no caso da representação decimal, um racional que admite representação binária finita admite também um representação binária infinita.

Essa representação será útil na seção 6.7, onde empregamos a representação binária para mostrar que o conjunto dos números reais é não enumerável. Nesse caso, usaremos sempre a representação binária infinita e o racional 1, por exemplo, é representado por $0,11111\dots$.

6. Números Reais

6.1 Introdução

A existência do conjunto dos números reais, assim como a dos demais conjuntos numéricos, surge como extensão para preencher lacunas deixadas pelos conjuntos numéricos até então definidos. Enquanto as lacunas que deram origem aos inteiros e racionais são mais intuitivas e de natureza prática, as lacunas que levam ao surgimento dos reais têm origem em questionamentos mais sofisticados. A forma mais simples desse questionamento diz respeito à medida da diagonal de um quadrado de lado 1 que, como mostraremos, não pode ser expressa como número racional na forma de quociente de dois inteiros. Outro questionamento diz respeito à representação decimal dos racionais, sempre associados às dízimas periódicas, dando espaço ao questionamento sobre a natureza dos números associados às dízimas não periódicas. Esses questionamentos revelam uma lacuna no conjunto dos racionais, justificando sua extensão para abrigar esses números de existência inquestionável, mas cuja natureza extrapola o conjunto dos racionais.

A construção do conjunto do números reais pode usar diversas estratégias. A partir da definição de corpo ordenado completo, mostra-se que o conjunto dos racionais é um corpo ordenado que não é completo, levando o conjunto dos reais a ser definido como um corpo ordenado completo [1]. Outra forma de construir os reais é definindo uma relação de equivalência entre as sequências de números racionais, levando os reais a serem definidos como classes de equivalência dessa relação [2]. Os *cortes de Dedekind* definem outra estratégia para construção dos reais, usando subconjuntos dos racionais obtidos como secção destes em dois subconjuntos cujas cotas superiores do primeiro estão no segundo. Quando o supremo do primeiro conjunto não está no segundo, o corte é dito não racional, levando os reais a serem definidos como o conjunto de todos cortes, racionais e não racionais [10].

Independentemente da estratégia usada para construir os reais, obtém-se, pela primeira vez, um conjunto de números que podem ser associados à medida de qualquer segmento da reta, como à diagonal do quadrado de lado 1 que, como mostramos na seção seguinte, não é um número racional.

6.2 Raiz de 2 não é Racional

A existência de um número cujo quadrado é igual a 2 surge naturalmente em situações práticas, como ao se calcular a diagonal de um quadrado de lado 1. Usando o Teorema de Pitágoras e indicando a diagonal por d, temos a relação $d^2 = 1^2 + 1^2$ ou $d^2 = 2$. Esse número d, chamado raiz de 2, é representado por $d = \sqrt{2}$. A suposição de que $\sqrt{2}$ seja racional leva à suposição de que exista uma fração irredutível $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$ que, por sua vez, leva a um absurdo. De fato, se existe fração irredutível $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, teríamos $\frac{a^2}{b^2} = 2$, donde $a^2 = 2b^2$. Disso temos que a^2 é par e, portanto, a é par. Como a é par, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2q$. Então, de $a^2 = 2b^2$, teríamos $(2q)^2 = 2b^2$ que leva a $4q^2 = 2b^2$, ou seja, $2q^2 = b^2$. Disso temos que b também é par. Sendo a e b pares, a fração $\frac{a}{b}$ não é irredutível. Isso é absurdo, pois, por hipótese, a fração seria irredutível. Então a hipótese de que $\sqrt{2}$ seja racional leva a um absurdo e, portanto, esse número não pode ser racional.

Assim como $\sqrt{2}$, é fácil mostrar que existem infinitos número que não são racionais. Por exemplo, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ a raiz de $2n^2$ não é racional. Na próxima seção, usamos a estratégia conhecida por *Cortes de Dedekind* para construir o conjunto $\mathbb{R}$ dos *reais*, que comporta todos os números associados a medidas de segmentos, sejam eles racionais ou irracionais.

6.3 Cortes de Dedekind

Na construção dos números reais proposta por *Richard Dedekind*, cada elemento de $\mathbb{R}$ é associado a um subconjunto de $\mathbb{Q}$ denominado *corte*. O conjunto $L = \{x \in \mathbb{Q}; x < 2\}$, por exemplo, está associado ao real 2. A ideia de cortes explora o fato de que subconjuntos de $\mathbb{Q}$ limitados superiormente nem sempre tem supremo racional. Então, aqueles cortes com supremo racional são associados ao conjunto dos números racionais, e os cortes que não tem supremo racional são associados a um novo conjunto, denominado irracionais. Finalmente, o conjunto dos reais é definido como união dos racionais e irracionais. Uma versão em português do trabalho original de Dedekind sobre os cortes é encontrada na referência [14].

Definição 6.1 Seja uma partição dos racionais $\mathbb{Q} = \alpha \cup \alpha^c$. Dizemos que α é um corte se atende às seguintes condições:

i) Dados $x \in \alpha$ e $y \in \alpha^c$, tem-se $x < y$;
ii) Não existe elemento máximo em α.

O segundo item da definição não descarta a possibilidade de que exista supremo de α em $\mathbb{Q}$. A proposição seguinte garante que, se existe $Sup(\alpha)$, então $Sup(\alpha) \in \alpha^c$.

Proposição 6.1 Seja α um corte, obtido pela partição $\mathbb{Q} = \alpha \cup \alpha^c$. Então, $r \in \mathbb{Q}$ é cota superior de α se, e somente se, $r \in \alpha^c$.

Demonstração:

$\Rightarrow$ Suponha que $r \in \mathbb{Q}$ seja cota superior de α. Se $r \notin \alpha^c$, teríamos $r \in \alpha$ pela partição, donde r seria máximo em α. Absurdo, pois, por (ii), não existe elemento máximo em α. Então $r \in \alpha^c$.

$\Leftarrow$ Suponha que $r \in \alpha^c$ não é cota superior de α. Então, existe $s \in \alpha$ tal que $s > r$. Absurdo, pois, por (i), se $s \in \alpha$ e $r \in \alpha^c$, tem-se $s < r$. Então r é cota superior de α.

Uma consequência imediata da proposição acima é que, se α é um corte e existe $Sup(\alpha) \in \mathbb{Q}$, então $Sup(\alpha) \in \alpha^c$.

Definição 6.2 Quando o corte α é tal que existe $Sup(\alpha) \in \mathbb{Q}$, dizemos que α é um *corte racional*, caso contrário, dizemos que é um *corte irracional*.

Proposição 6.2 Para todo $r \in \mathbb{Q}$, o conjunto $\sigma = \{x \in \mathbb{Q}; x < r\}$ é um corte racional.

Demonstração: Temos que σ é um corte, pois:

i) Se $x \in \sigma$ e $y \in \sigma^c$, temos $x < r$ e $y \geq r$, donde $x < y$;
ii) Dado $x \in \sigma$ qualquer, temos $x < \dfrac{x+r}{2} < r$. Então $\dfrac{x+r}{2} \in \sigma$ e $\dfrac{x+r}{2} > x$, donde x não é cota superior e não pode ser elemento máximo de σ.

Além disso, como para todo $x < r$, x não é cota superior de σ, r é a menor das cotas superiores e, portanto, $Sup(\sigma) = r \in \mathbb{Q}$, donde concluímos que σ é corte racional.

Assim como todo racional r está associado a um único corte racional $\alpha = \{x \in \mathbb{Q}; x < r\}$, todo corte racional β pode ser associado a um único racional $s = Sup(\beta)$ de forma que $\beta = \{x \in \mathbb{Q}; x < s\}$. A partir dessa associação, indicaremos cada corte racional $\alpha = \{x \in \mathbb{Q}; x < r\}$ por $\hat{r}$. A proposição seguinte assegura que existem cortes que não são racionais.

Proposição 6.3 O conjunto $\sigma = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2 \text{ } ou \text{ } x < 0\}$ é um corte irracional.

Demonstração: Temos que σ é um corte, pois

i) Se $x \in \sigma$ e $y \in \sigma^c$, temos $x^2 < 2$ e $y^2 \geq 2$, donde $x^2 < y^2$. Como $y > 0$, temos $x < y$;
ii) Dado $x \in \sigma$, $x > 0$, temos que $0 < \dfrac{2-x^2}{2x+1}$. Tome um racional $r < 1$ tal que $0 < r < \dfrac{2-x^2}{2x+1}$. Usando as desigualdades anteriores temos que $r^2 < r$ e $r(2x+1) < (2-x^2)$. Mostremos que $x+r \in \sigma$. Temos $(x+r)^2 = x^2+2xr+r^2$. Como $r^2 < r$, temos $(x+r)^2 < x^2+2xr+r$, donde $(x+r)^2 < x^2+r(2x+1)$. Como $r(2x+1) < (2-x^2)$, temos $(x+r)^2 < x^2+2-x^2$. Portanto, $(x+r)^2 < 2$, donde $x+r \in \sigma$. Então x não é cota superior e não pode ser elemento máximo de σ.

Mostremos agora que o conjunto das cotas superiores de σ não tem elemento mínimo e, portanto, não existe $Sup(\sigma)$ em $\mathbb{Q}$. Se $x \in \mathbb{Q}$ é cota superior de σ, $x^2 \geq 2$. Como não existe racional x tal que $x^2 = 2$, temos $x^2 > 2$, ou seja, $x^2 - 2 > 0$. Tome um racional r tal que $0 < r < \dfrac{x^2-2}{2x}$, de forma que $2rx < x^2 - 2$, ou seja, $x^2 - 2rx > 2$. Como $(x-r)^2 = x^2 - 2xr + r^2 > x^2 - 2rx > 2$, concluímos que $x - r$ também é cota superior de σ, donde x não é a menor das cotas superiores. Como não existe a menor das cotas superiores de σ, não existe $Sup(\sigma)$ em $\mathbb{Q}$ e, portanto, σ é um corte irracional.

Definição 6.3 Ao conjunto de todos os cortes, racionais e irracionais, denominamos *conjunto dos números reais*, indicado por $\mathbb{R}$. Cada corte racional $\hat{r} = \{x \in \mathbb{Q}; x < r\} \in \mathbb{R}$ será identificado com o *número racional* r e cada corte irracional $\alpha \in \mathbb{R}$ será chamado *número irracional* α.

Nas seções seguintes, definimos uma relação de ordem nos reais e as operações de soma e produto nos reais.

6.4 Relação de Ordem

Nesta seção, usamos o fato de que os números reais foram definidos como cortes, que são conjuntos de números racionais, para definir uma relação de ordem nos reais usando as propriedades da relação de inclusão sobre conjuntos.

Definição 6.4 Definimos como relação de precedência sobre $\mathbb{R}$ a relação indicada por $\leq$ e dada por $\alpha \leq \beta$ se, e somente se, $\alpha \subset \beta$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nesse caso, dizemos que α *é menor ou igual a* β.

Usando a definição acima, dados $\hat{2}, \hat{3} \in \mathbb{R}$, podemos escrever $\hat{2} \leq \hat{3}$, pois temos que $\{x \in \mathbb{Q}; x < 2\} \subset \{x \in \mathbb{Q}; x < 3\}$. Dados $\alpha = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 3 \; ou \; x < 0\}$ e $\beta = \{x \in \mathbb{Q}; x^3 < 5\}$, temos $\beta \leq \alpha$, pois $\beta \subset \alpha$ (verifique).

Proposição 6.4 A relação $\leq$ sobre $\mathbb{R}$, é uma relação de ordem.

Demonstração: Mostremos que a relação $\leq$ sobre $\mathbb{R}$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva:

i) (Reflexividade) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $\alpha \subset \alpha$, donde $\alpha \leq \alpha$;
ii) (antissimetria) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$, temos $\alpha \subset \beta$ e $\beta \subset \alpha$, donde $\alpha = \beta$;
iii) (Transitividade) Dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$, então $\alpha \subset \beta$ e $\beta \subset \gamma$, donde $\alpha \subset \gamma$ e, portanto, $\alpha \leq \gamma$.

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se $\alpha \leq \beta$ com $\alpha \neq \beta$, escreveremos $\alpha < \beta$. Assim, a partir da definição, pode-se mostrar que, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, é válida uma, e somente uma das possibilidades: $\alpha < \beta$ ou $\beta < \alpha$ ou $\alpha = \beta$.

Definição 6.5 Considere o corte $\hat{0} = \{x \in \mathbb{Q}; x < 0\}$. Dado um real $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos:

i) α é **positivo**, se $\alpha > \hat{0}$;
ii) α é **negativo**, se $\alpha < \hat{0}$;
iii) α é **não negativo**, se $\alpha \geq \hat{0}$;
iv) α é **não positivo**, se $\alpha \leq \hat{0}$.

O resultado seguinte estabelece que, dado um corte α, existem elementos $a \in \alpha$ e $b \in \alpha^c$ tão próximos quanto se queira. Esse resultado será importante para mostrar que todo corte α tem elemento simétrico $(-\alpha)$ para operação de adição.

Proposição 6.5 Seja o corte $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, para todo $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, existem $a \in \alpha$ e $b \in \alpha^c$ tais que $b - a = r$.

Demonstração: Considere $x \in \alpha$ e $r \in \mathbb{Q}$, com $r > 0$. Note que a sequência

$$x, x + r, x + 2r, \ldots, x + jr, \ldots$$

não é limitada superiormente. Como α é limitado superiormente, existe $j_0 \in \mathbb{Z}$, $j_0 \geq 1$, de modo que $x + j_0 r \notin \alpha$. Isso implica que $x + j_0 r \in \alpha^c$. Defina o conjunto $L = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq 1 \text{ e } x + mr \in \alpha^c\}$. Observe que L é um subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$, pois $j_0 \in L$. Além disso, L é limitado inferiormente. Pelo Princípio do Menor Inteiro, existe $n \in L$ de modo que n é o menor elemento de L. Como $n \in L$, vemos que $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ e $x + nr \in \alpha^c$. A seguir, vamos mostrar que $x + (n-1)r \in \alpha$. Com efeito, se $n = 1$, então $x + (n-1)r = x \in \alpha$. Agora, suponhamos que $n > 1$ e que $x + (n-1)r \in \alpha^c$. Mas isso implica que $n - 1 \in L$, o que contradiz a minimalidade de n. Assim, $x + (n-1)r \in \alpha$. Portanto, existe $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, de modo que $x + (n-1)r \in \alpha$ e $x + nr \in \alpha^c$. Tomando $a = x + (n-1)r$ e

$b = x + nr$, temos que $b - a = r$.

Nota 6.1 O resultado anterior continua válido se exigirmos que $b \neq Sup(\alpha)$. De fato, se $x + nr = Sup(\alpha) \in \alpha^c$, então, do conceito de supremo e da Definição 6.1, obtemos $x + (n-1)r + \frac{r}{2} \in \alpha$ e $x + nr + \frac{r}{2} \in \alpha^c$. Nesse caso, tome $a = x + (n-1)r + \frac{r}{2}$ e $b = x + nr + \frac{r}{2}$.

6.5 Soma e Produto

Já definimos o conjunto dos reais, $\mathbb{R}$, como conjunto de cortes que, além comportar representantes para cada número racional, tem também representantes para números que não são racionais, como $\sqrt{2}$. Também mostramos que a relação de inclusão define uma relação de ordem sobre $\mathbb{R}$, enquanto conjunto de cortes. Nesta seção, definiremos as operações de adição e de multiplicação em $\mathbb{R}$. Antes, porém, vamos definir o oposto e o valor absoluto de um corte.

Definição 6.6 Dado o corte $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos seu oposto como $-\alpha = \{-r; r \in \alpha^c \ e \ r \neq Sup(\alpha)\}$.

É fácil perceber que $-\alpha$ é um corte e que $Sup(-\alpha) = -Sup(\alpha)$. Além disso, $-(-\alpha) = \alpha$, como mostramos na proposição a seguir.

Proposição 6.6 Para todo corte $\alpha \in \mathbb{R}$, vale:

i) Se $\alpha = \hat{0} \Rightarrow -\alpha = \hat{0}$;
ii) Se $\alpha < \hat{0} \Rightarrow -\alpha > \hat{0}$;
iii) Se $\alpha > \hat{0} \Rightarrow -\alpha < \hat{0}$;
iv) $-(-\alpha) = \alpha$.

Demonstração:

i) Exercício;
ii) Exercício;
iii) Exercício;
iv) $-(-\alpha) = \{-(-r); -r \in (-\alpha)^c \ e \ -r \neq Sup(-\alpha)\}$, ou seja,
$-(-\alpha) = \{r; -r \notin (-\alpha) \ e \ -r \neq -Sup(\alpha)\}$, donde,
$-(-\alpha) = \{r; [r \notin \alpha^c \ \ ou \ r = Sup(\alpha)] \ e \ r \neq Sup(\alpha)\}$. Portanto,
$-(-\alpha) = \{r; r \notin \alpha^c\}$, donde
$-(-\alpha) = \alpha$.

Definição 6.7 Dado o corte $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos seu valor absoluto como $|\alpha|$, dado por

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & se \ \alpha \geq \hat{0} \\ -\alpha, & se \ \alpha \leq \hat{0} \end{cases}$$

Proposição 6.7 Para todo corte $\alpha \in \mathbb{R}$, vale:

i) $|\alpha| \geq \hat{0}$;
ii) $|\alpha| = \hat{0} \Longleftrightarrow \alpha = \hat{0}$;
iii) $|\alpha| = |-\alpha|$.

Demonstração:

i) Exercício.
ii) Exercício.
iii)

$$|-\alpha| = \begin{cases} -\alpha, & se\ -\alpha \geq \hat{0} \\ -(-\alpha), & se\ -\alpha \leq \hat{0} \end{cases} = \begin{cases} -\alpha, & se\ \alpha \leq \hat{0} \\ \alpha, & se\ \alpha \geq \hat{0} \end{cases} = |\alpha|.$$

Definição 6.8 Para cada par $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, definimos a soma $\alpha + \beta = \{r + s; r \in \alpha\ e\ s \in \beta\}$.

Pela definição acima, $\alpha + \beta$ é um subconjunto dos racionais, pois $\alpha, \beta \subset \mathbb{Q}$ e, pelo fechamento da adição nos racionais, temos $r + s \in \mathbb{Q}$ para todo $r \in \alpha$ e $s \in \beta$. A proposição seguinte garante que $\alpha + \beta$ é um corte e, portanto, $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$.

Proposição 6.8 Sejam os cortes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então, $\alpha + \beta$ é um corte e $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Mostremos que $\gamma = \alpha + \beta$ satisfaz às condições da definição de corte:

i) Dados $x \in \gamma$ e $y \in \gamma^c$, mostremos que $x < y$. Existem $r \in \alpha$ e $s \in \beta$ tais que $x = r + s$. Se $y < x$, $y = r + s'$ com $s' < s$. Supor $s' \in \beta^c$ implicaria $s' > s$, então deve ser $s' \in \beta$. Temos então que $y = r + s'$ com $r \in \alpha$ e $s' \in \beta$ e, por definição, $y \in \gamma$. Absurdo, pois, por hipótese, $y \in \gamma^c$. Então deve ser $x < y$.
ii) Para todo $x \in \gamma$, x não é elemento máximo de γ. De fato, $x = r + s$, com $r \in \alpha$ e $s \in \beta$. Como α e β não tem máximo, existem $r' \in \alpha$ e $s' \in \beta$ tais que $r' > r$ e $s' > s$. Daí, existe $x' = r' + s' \in \gamma$, com $x' > x$. Portanto x não é elemento máximo de γ.

Por (i) e (ii), temos que $\alpha + \beta$ é um corte e, portanto, $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$.

Exemplo 6.1 Dados os cortes racionais $\hat{2}$ e $\hat{3}$, vale $\hat{2} + \hat{3} = \hat{5}$. De fato, observando que $\hat{2} = \{r \in \mathbb{Q}; r < 2\}$, $\hat{3} = \{s \in \mathbb{Q}; s < 3\}$ e $\hat{5} = \{t \in \mathbb{Q}; t < 5\}$, basta mostrar que $\hat{2} + \hat{3} \subset \hat{5}$ e $\hat{5} \subset \hat{2} + \hat{3}$.

i) Mostremos que $\hat{2} + \hat{3} \subset \hat{5}$. Dados $r \in \hat{2}$ e $s \in \hat{3}$, vale $r < 2$ e $s < 3$, donde $r + s < 5$, ou seja, $r + s \in \hat{5}$. Como $\hat{2} + \hat{3} = \{r + s; r \in \hat{2}\ e\ s \in \hat{3}\}$, então $\hat{2} + \hat{3} \subset \hat{5}$.
ii) Mostremos que $\hat{5} \subset \hat{2} + \hat{3}$. Dado $t \in \hat{5}$, temos que $t < 5$. Então existe $x \in \mathbb{Q}$ com $x > 0$ tal que $t = 5 - x$. Tomando $r = 2 - \frac{x}{2}$ e s tal que $t = r + s$, temos $r + s = 5 - x$, donde $2 - \frac{x}{2} + s = 5 - x$. Então, $s = 3 - \frac{x}{2}$ e, portanto, $s < 3$. Temos então $t = r + s$ com $r \in \hat{2}$ e $s \in \hat{3}$, donde $t \in \hat{2} + \hat{3}$. Portanto, $\hat{5} \subset \hat{2} + \hat{3}$.

Por (i) e (ii), concluímos que $\hat{2} + \hat{3} = \hat{5}$.

A definição 6.8, na verdade, define a operação de adição no conjunto dos reais e a Proposição 6.8 garante que $\mathbb{R}$ é fechado em relação a essa operação. Feito isso, mostremos agora que a adição em $\mathbb{R}$ é comutativa, associativa, tem elemento neutro $\hat{0}$ e todos os elementos de $\mathbb{R}$ são simetrizáveis.

Proposição 6.9 A operação de adição em $\mathbb{R}$ satisfaz às seguintes propriedades:

i) Comutatividade;
ii) Associatividade;
iii) Elemento neutro;
iv) Elementos simetrizáveis.

Demonstração: Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Temos

i) **Comutatividade:**
$\alpha + \beta = \{r+s; r \in \alpha\ e\ s \in \beta\} = \{s+r; s \in \beta\ e\ r \in \alpha\} = \beta + \alpha$

ii) **Associatividade:**
$\alpha + (\beta + \gamma) = \{r+s; r \in \alpha\ e\ s \in (\beta+\gamma)\}$.
Como $s \in (\beta+\gamma)$, existem $s_1 \in \beta$ e $s_2 \in \gamma$ tais que $s = s_1 + s_2$. Então, temos:
$\alpha + (\beta+\gamma) = \{r + (s_1+s_2); r \in \alpha\ e\ s_1 \in \beta\ e\ s_2 \in \gamma\}$, ou seja,
$\alpha + (\beta+\gamma) = \{(r+s_1)+s_2; (r+s_1) \in (\alpha+\beta)\ e\ s_2 \in \gamma\} = (\alpha+\beta)+\gamma$.

iii) **Elemento neutro:** $\hat{0} = \{r \in \mathbb{Q}; r < 0\}$ é elemento neutro da adição em $\mathbb{R}$. De fato;

a) Dado $x \in \alpha + \hat{0}$, temos $x = r+s$ com $r \in \alpha$ e $s \in \hat{0}$. Como $s < 0$, então $r+s < r$ e, portanto, $r+s \in \alpha$. Então, $\alpha + \hat{0} \subset \alpha$.

b) Dado $s \in \alpha$, tome $x \in \alpha$ com $x > s$ e temos $s = x + (s-x)$. Como $s - x \in \hat{0}$ e $x \in \alpha$, temos $s \in \hat{0} + \alpha$. Então, $\alpha \subset \alpha + \hat{0}$.

Por a) e b), temos $\hat{0} + \alpha = \alpha$.

iv) **Elementos simetrizáveis** Mostremos que $\alpha + (-\alpha) = \hat{0}$ e, portanto, $-\alpha$ é simétrico de α para adição.

a) Se $x \in (\alpha + (-\alpha))$, então $x = a+b$ com $a \in \alpha$ e $b \in -\alpha$. Por definição, existe $r \in \alpha^c$ tal que $b = -r$. Como $a < r$, temos $a - r < 0$, donde $x = a + b = a + (-r) < 0$. Portanto, $\alpha + (-\alpha) \subset \hat{0}$.

b) Se $x \in \hat{0}$, temos $x < 0$. Tome $a \in \alpha$ e $b \in \alpha^c$ tais que $b - a = -x > 0$ e $b \neq Sup(\alpha)$. Então, $x = a + (-b)$ com $a \in \alpha$ e $-b \in (-\alpha)$, donde $x \in (\alpha + (-\alpha))$. Portanto, $\hat{0} \subset \alpha + (-\alpha)$.

Por a) e b) temos $\alpha + (-\alpha) = \hat{0}$.

Definição 6.9 Para cada par $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $\alpha \geq \hat{0}$ e $\beta \geq \hat{0}$, definimos o produto $\alpha.\beta = \{r.s; r \in \alpha,\ s \in \beta, r \geq 0, s \geq 0\} \cup (\mathbb{Q}_-)$.

Exemplo 6.2 Dados os cortes racionais $\hat{2}$ e $\hat{3}$, vale $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{6}$. De fato, observando que $\hat{2} = \{r \in \mathbb{Q}; r < 2\}$, $\hat{3} = \{s \in \mathbb{Q}; s < 3\}$ e $\hat{6} = \{t \in \mathbb{Q}; t < 6\}$, basta mostrar que $\hat{2} \cdot \hat{3} \subset \hat{6}$ e $\hat{6} \subset \hat{2} \cdot \hat{3}$.

i) Mostremos que $\hat{2} \cdot \hat{3} \subset \hat{6}$. Dados $r \in \hat{2}$ e $s \in \hat{3}$, com $r, s \geq 0$, vale $0 \leq r < 2$ e $0 \leq s < 3$, donde $0 \leq r \cdot s < 6$, ou seja, $r \cdot s \in \hat{6}$. Como $\hat{2} \cdot \hat{3} = \{r \cdot s; r \in \hat{2},\ s \in \hat{3}, r \geq 0, s \geq 0\} \cup (\mathbb{Q}_-)$, então $\hat{2} \cdot \hat{3} \subset \hat{6}$.

ii) Mostremos que $\hat{6} \subset \hat{2} \cdot \hat{3}$. Dado $t \in \hat{6}$, se $t < 0$ vale $t \in \hat{2} \cdot \hat{3}$ pela definição. Se $t \geq 0$, temos que $0 \leq t < 6$. Tome $x \in \mathbb{Q}$, com $0 < x \leq 1$ tal que $t = 6(1-x)$ e tome $r = 2(1 - \frac{x}{2})$. Dado s tal que $t = r \cdot s$, então $r \cdot s = 6(1-x)$, donde $2(1-\frac{x}{2}) \cdot s = 6(1-x)$. Então, $s = 3 - \frac{3x}{2-x}$ e, portanto, $s < 3$. Temos então $t = r \cdot s$ com $r \in \hat{2}$ e $s \in \hat{3}$, donde $t \in \hat{2} \cdot \hat{3}$. Portanto, $\hat{6} \subset \hat{2} \cdot \hat{3}$.

Por (i) e (ii), concluímos que $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{6}$.

Como todos os cortes α, β são ilimitados inferiormente em $\mathbb{Q}$, o conjunto dos produtos entre elementos quaisquer α e β seria um conjunto ilimitado superiormente, pois, para todo $t \in \mathbb{Q}$, existem $r \in \alpha$ e $s \in \beta$, com $r, s < 0$, tais que $r.s > t$. A definição, então, cuida que o produto continue um conjunto limitado superiormente em $\mathbb{Q}$ e, dessa forma, a proposição seguinte garante que $\alpha.\beta$ é um corte.

Proposição 6.10 Sejam os cortes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $\alpha \geq \hat{0}$ e $\beta \geq \hat{0}$. Então, $\alpha.\beta$ é um corte e $\alpha.\beta \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Mostremos que $\gamma = \alpha.\beta$ satisfaz às condições da definição de corte:

i) Dados $x \in \gamma$ e $y \in \gamma^c$, mostremos que $x < y$. Se $x \leq 0$, como $y > 0$, temos $x < y$. Supondo $x, y > 0$, existem $r \in \alpha$ e $s \in \beta$, com $r, s > 0$, tais que $x = r.s$. Se $y < x$, $y = r.s'$ com $0 < s' < s$. Supor $s' \in \beta^c$ implicaria $s' > s$, então deve ser $s' \in \beta$. Temos então que $y = r.s'$ com $r \in \alpha$ e

$s' \in \beta$ e, por definição, $y \in \gamma$. Absurdo, pois, por hipótese, $y \in \gamma^c$. Então deve ser $x < y$.

ii) Para todo $x \in \gamma$, x não é elemento máximo de γ. De fato, se $x > 0$, temos $x = r.s$, com $r \in \alpha$ e $s \in \beta$ e $r, s > 0$. Como α e β não tem máximo, existem $r' \in \alpha$ e $s' \in \beta$ tais que $r' > r$ e $s' > s$. Daí, existe $x' = r'.s' \in \gamma$, com $x' > x$. Portanto, x não é elemento máximo de γ.

Por (i) e (ii), temos que $\alpha.\beta$ é um corte e, dessa forma, $\alpha.\beta \in \mathbb{R}$.

A definição 6.9, define a operação de produto no conjunto dos reais não negativos. Falta-nos estender a definição para todo o conjunto $\mathbb{R}$. A extensão da definição se faz pelo uso do valor absoluto, como segue.

Definição 6.10 Para cada par $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, definimos o produto $\alpha.\beta$ como:

$$\alpha.\beta = \begin{cases} |\alpha|.|\beta|, & se\ \alpha \leq \hat{0}\ e\ \beta \leq \hat{0} \\ -(|\alpha|.|\beta|), & se\ \alpha \leq \hat{0}\ e\ \beta \geq \hat{0} \\ -(|\alpha|.|\beta|), & se\ \alpha \geq \hat{0}\ e\ \beta \leq \hat{0} \end{cases}$$

Com uso da definição estendida, verifica-se as igualdades da proposição seguinte.

Proposição 6.11 Dados os cortes, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vale:

i) $(-\alpha).\beta = -\alpha.\beta$;
ii) $\alpha.(-\beta) = -\alpha.\beta$;
iii) $(-\alpha).(-\beta) = \alpha.\beta$.

Demonstração: (i)

a) $(\alpha > \hat{0}, \beta > \hat{0}) \Rightarrow (-\alpha).\beta = -(|-\alpha|.|\beta|) = -(|\alpha|.|\beta|) = -(\alpha.\beta)$.
A última igualdade usa a definição de módulo com $\alpha > \hat{0}, \beta > \hat{0}$

b) $(\alpha < \hat{0}, \beta < \hat{0}) \Rightarrow (-\alpha).\beta = -(|-\alpha|.|\beta|) = -(|\alpha|.|\beta|) = -(\alpha.\beta)$
A última igualdade usa a primeira linha da definição 6.10.

c) $(\alpha < \hat{0}, \beta > \hat{0}) \Rightarrow (-\alpha).\beta = |-\alpha|.|\beta| = |\alpha|.|\beta| = -(-(|\alpha|.|\beta|)) = -(\alpha.\beta)$
A última igualdade usa a segunda linha da definição 6.10.

d) $(\alpha > \hat{0}, \beta < \hat{0}) \Rightarrow (-\alpha).\beta = |-\alpha|.|\beta| = |\alpha|.|\beta| = -(-(|\alpha|.|\beta|)) = -(\alpha.\beta)$
A última igualdade usa a terceira linha da definição 6.10.

O caso (ii) é análogo ao (i), e o caso (iii) é consequência dos dois primeiros.

Nosso próximo passo será enunciar as propriedades da operação de multiplicação de cortes, como fizemos com a soma. Antes, porém, definimos o inverso de um corte, que será necessário ao mostrar que todo corte não nulo tem simétrico multiplicativo.

Definição 6.11 Para cada corte $\alpha \in \mathbb{R}$, com $\alpha \neq \hat{0}$, definimos seu inverso α^{-1} como:

i) $\alpha^{-1} = \left\{ \dfrac{1}{r}; r \in \alpha^c \;\; e\ r \neq Sup(\alpha) \right\} \cup \mathbb{Q}_-$, se $\alpha > \hat{0}$;
ii) $\alpha^{-1} = -\left(|\alpha|^{-1}\right)$, se $\alpha < \hat{0}$.

Exemplo 6.3 O inverso de $\hat{2}$ é $\left(\hat{\dfrac{1}{2}}\right)$. De fato, por definição $\left(\hat{2}\right)^{-1} = \left\{ \dfrac{1}{r};\ r \in \left(\hat{2}\right)^c \;\; e\ r \neq Sup(\hat{2}) \right\} \cup \mathbb{Q}_-$.

Isso implica que $(\hat{2})^{-1} = \left\{\frac{1}{r};\ r \in \mathbb{Q}\ e\ r > 2\right\} \cup \mathbb{Q}_-$. Tomando $s = \frac{1}{r}$ para cada $r > 2$, podemos escrever que $(\hat{2})^{-1} = \left\{s;\ s \in \mathbb{Q}\ e\ \frac{1}{s} > 2\right\} \cup \mathbb{Q}_- = \left\{s \in \mathbb{Q};\ s < \frac{1}{2}\right\} = \widehat{\left(\frac{1}{2}\right)}$.

É fácil perceber que α^{-1} é um corte e que $Sup(\alpha^{-1}) = Sup(\alpha)^{-1}$. Além disso, $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$, como mostramos na proposição a seguir.

Proposição 6.12 Para todo corte $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \hat{0}$, vale:

i) Se $\alpha < \hat{0} \Rightarrow \alpha^{-1} < \hat{0}$;
ii) Se $\alpha > \hat{0} \Rightarrow \alpha^{-1} > \hat{0}$;
iii) $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$.

Demonstração: (iii)
$(\alpha^{-1})^{-1} = \{(r^{-1})^{-1}; r^{-1} \in (\alpha^{-1})^c\ e\ r^{-1} \neq Sup(\alpha^{-1})\}$, ou seja,
$(\alpha^{-1})^{-1} = \{r; r^{-1} \notin (\alpha^{-1})\ e\ r^{-1} \neq Sup(\alpha)^{-1}\}$, donde,
$(\alpha^{-1})^{-1} = \{r; [r \notin \alpha^c\ \ ou\ r = Sup(\alpha)]\ e\ r \neq Sup(\alpha)\}$. Portanto,
$(\alpha^{-1})^{-1} = \{r; r \notin \alpha^c\}$, donde
$(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$.

Proposição 6.13 Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha \neq \hat{0}$, vale $\alpha.\alpha^{-1} = \hat{1}$.

Demonstração: Mostremos que $\alpha.\alpha^{-1} \subset \hat{1}$ e que $\hat{1} \subset \alpha.\alpha^{-1}$. Sem perda de generalidade, consideramos $\alpha > \hat{0}$, pois $\alpha.\alpha^{-1} = (-\alpha)(-\alpha^{-1})$.

i) Tome $x \in \alpha.\alpha^{-1}$. Então $x = r.s$, com $r \in \alpha$ e $s \in \alpha^{-1}$. Existe $t \in \alpha^c$ tal que $s = \frac{1}{t}$, e temos $x = r.\frac{1}{t}$ com $t > r$, donde concluímos que $x < 1$ e, portanto, $x \in \hat{1}$. Então, $\alpha.\alpha^{-1} \subset \hat{1}$.
ii) Tome $x \in \hat{1}$. Observe que, para todo $r \in \mathbb{Q}^+$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $qr \in \alpha$ e $(q+1)r \in \alpha^c$ (Proposição 6.5). Então $qr \in \alpha$ e $\frac{1}{(q+1)r} \in \alpha^{-1}$, donde $qr.\frac{1}{(q+1)r} \in \alpha.\alpha^{-1}$. Como $x < 1$, tome r, e respectivo q, tais que $q > \frac{x}{1-x}$ e temos $x < \frac{q}{q+1} = qr.\frac{1}{(q+1)r}$ com $qr \in \alpha$ e $\frac{1}{(q+1)r} \in \alpha^{-1}$. Então, $\hat{1} \subset \alpha.\alpha^{-1}$.

Por (i) e (ii), concluimos que $\alpha.\alpha^{-1} = \hat{1}$.

Proposição 6.14 A operação de multiplicação em $\mathbb{R}$ satisfaz às seguintes propriedades:

i) Comutatividade;
ii) Associatividade;
iii) Elemento neutro;
iv) Elementos simetrizáveis.

Demonstração:

iii) **Elemento neutro:** $\hat{1} = \{r \in \mathbb{Q}; r < 1\}$ é elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{R}$. De fato, sem perda de generalidade, considere $\alpha > \hat{0}$.

a) Dado $x \in \alpha.\hat{1}$, temos que $x = rs$ com $r \in \alpha$ e $s \in \hat{1}$. Como $s < 1$, então $rs < r$ e, portanto, $rs \in \alpha$. Então, $\alpha.\hat{1} \subset \alpha$.
b) Dado $s \in \alpha$, tome $x \in \alpha$ com $x > s$ e temos $s = x(sx^{-1})$. Como $s < x$, temos $sx^{-1} < 1$. De $x \in \alpha$ e $sx^{-1} \in \hat{1}$, temos $s \in \alpha.\hat{1}$. Então, $\alpha \subset \alpha.\hat{1}$.

Por a) e b) temos $\alpha.\hat{1} = \alpha$.

iv) **Elementos simetrizáveis:** Pela proposição 6.13, todo $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha \neq \hat{0}$ tem simétrico α^{-1}.

6.6 $\mathbb{R}$ é Completo

Vimos que, em $\mathbb{Q}$, existem os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2 \ ou \ x < 0\}$ e $B = A^c$, de forma que $A \cup B = \mathbb{Q}$, mas não existe $r \in \mathbb{Q}$ satisfazendo $s \leq r \leq t$ para todo $s \in A$ e $t \in B$. Equivalentemente, não existe em $\mathbb{Q}$ o $Sup(A)$ ou o $Inf(B)$. Por essa característica, dizemos que o conjunto $\mathbb{Q}$ tem 'lacunas', ou seja, não é completo.

Apesar de guardar semelhanças quanto à relação de ordem e quanto às propriedades aritméticas entre elementos de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, veremos, na proposição seguinte que, diferentemente de $\mathbb{Q}$, o conjunto $\mathbb{R}$ tem a propriedade da completude, ou seja, não tem 'lacunas'.

Proposição 6.15 Considere $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$. Suponha que para todo $\alpha \in X$ e $\beta \in X^c$ vale $\alpha < \beta$. Então, existe um número real λ tal que $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, quaisquer que sejam $\alpha \in X$ e $\beta \in X^c$.

Demonstração: Seja $\lambda = \bigcup \alpha_i$, a união de todos os cortes $\alpha_i \in X$. Mostremos que λ é um corte.

i) Dados $x, y \in \mathbb{Q}$ com $x \in \lambda$ e $y \in \lambda^c$, temos que $x \in \alpha_i$ para algum $\alpha_i \in X$. Se $y \leq x$, teríamos $y \in \alpha_i$ e, portanto, $y \in \lambda$, o que é absurdo pela suposição de que $y \in \lambda^c$. Então vale $x < y$;
ii) λ não tem elemento máximo, pois, se $y \in \lambda$ for elemento máximo de λ, teríamos que $y \in \alpha_i$ para algum $\alpha_i \in X$ e, então, y seria máximo de α_i, o que é absurdo, pois α_i é um corte e, por definição, não tem elemento máximo.

Pela definição de λ como união de todos os cortes de X temos que, para todo $\alpha \in X$, vale $\alpha \subset \lambda$ e, portanto, $\alpha \leq \lambda$. Além disso, suponha que exista $\beta \in X^c$ tal que $\beta < \lambda$. Então, existe $y \in \lambda$ que não é elemento de β e, tomando $\alpha \in X$ tal que $y \in \alpha$, temos $\beta < \alpha$ com $\alpha \in X$ e $\beta \in X^c$. Isso contraria a hipótese e, dessa maneira, temos $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ para todo $\alpha \in X$ e $\beta \in X^c$.

A proposição acima garante que todo subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente tem supremo, e $Sup(X) \in \mathbb{R}$. Além disso, todo subconjunto $Y \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente tem ínfimo, e $Inf(Y) \in \mathbb{R}$. Como vimos, o conjunto $\mathbb{Q}$ não tem essa característica pois, por exemplo, o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2 \ ou \ x < 0\}$ é limitado superiormente, mas não tem supremo em $\mathbb{Q}$.

Naturalmente que a definição de cada número real como um *corte*, que é um subconjunto dos números racionais, não é nada intuitivo, além de tornar os reais objetos de natureza diferente dos racionais, o que impede a inclusão $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Entretanto, associando cada racional $r \in \mathbb{Q}$ ao *corte racional* $\hat{r} = \{x \in \mathbb{Q}; x < r\}$, percebemos, pela proposição 6.2, que existe uma relação biunívoca entre o conjunto $\mathbb{Q}$ e o conjunto dos cortes racionais. Então, chamando de $\hat{\mathbb{Q}}$ o conjunto dos *cortes racionais* e observando que esse conjunto preserva as propriedades aritméticas e a ordem de $\mathbb{Q}$, dizemos que $\hat{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$ é uma cópia algébrica de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$. No que segue, usaremos indistintamente $\mathbb{Q}$ e $\hat{\mathbb{Q}}$, de forma que admitimos a inclusão $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, considerando $\mathbb{Q}$ a cópia algébrica dos racionais dentro dos reais.

6.7 $\mathbb{R}$ é Não Enumerável

Como discutimos no capítulo anterior, cada número racional pode ser representado por um número decimal. Além disso, na representação decimal, os números racionais estão sempre associados às dízimas periódicas, ficando em aberto saber a natureza dos números associados às dízimas não periódicas. Nesta seção, veremos que, na representação decimal, todas as dízimas, periódicas e não periódicas, estão associadas a números reais. Os números reais associados às dízimas não periódicas serão chamados *números irracionais*.

Proposição 6.16 Na representação decimal, toda dízima periódica pode ser associada a um corte racional. Além disso, toda dízima não periódica pode ser associada a um corte não racional.

Demonstração:

i) Se $d = 0,a_1 \dots a_p\overline{b_1 \dots b_q}$ é uma dízima periódica, temos, pela proposição 5.9, que existe um número racional r associado a d. Tomando o corte $\hat{r}$ associado a r, temos que $\hat{r}$ é um corte racional associado à dízima periódica d.

ii) Se $d = 0,a_1a_2 \dots a_p \dots$ é uma dízima não periódica, então $\forall p \in \mathbb{N}$, podemos obter as dízimas periódicas $d_l = 0,a_1a_2 \dots a_p\overline{0}$ e $d_u = 0,a_1a_2 \dots a_p\overline{9}$ tais que $d_l < d < d_u$. Sejam os reais α e β associados a d_l e d_u, respectivamente, e considere A o conjunto dos reais tais que $\alpha \in A$ e $\beta \in A^c$ para todo $p \in \mathbb{N}$. A proposição 6.15 garante que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $sup(A) = \lambda = Inf(A^c)$. Nesse caso, $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ para todo $p \in \mathbb{N}$ e, portanto, λ será um número real associado à dízima não periódica d.

Proposição 6.17 O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é um conjunto não enumerável.

Demonstração: Vamos considerar o conjunto $X = \{\alpha \in \mathbb{R};\ 0 \leq \alpha \leq 1\}$. Ao mostrar que não existe função bijetiva $f : \mathbb{N} \to X$, mostraremos que X é não enumerável e, sendo $X \subset \mathbb{R}$, concluiremos que $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Como visto na Seção 5.8, todo número racional $r \in X$ pode ser escrito, na expansão binária, como $r = 0,b_1b_2b_3 \dots$, onde $b_i \in \{0,1\}$. Então, com argumento análogo ao usado na Proposição 6.16, todo número real $\alpha \in X$ pode ser associado a uma expansão binária infinita. Supondo que existe $f : \mathbb{N} \to X$ bijetiva, então teríamos uma enumeração para os elementos de X e, por conseguinte, uma enumeração para as expansões binárias infinitas.

Usamos um argumento conhecido como *Diagonal de Cantor* para mostrar que tal enumeração é impossível. A bijeção f associaria cada número natural i a um número real $\alpha_i \in X$. A expansão binária, por sua vez, associa cada número natural j ao dígito correspondente a_{ij} na expansão binária de α_i. Considerando uma tabela com a enumeração dos elementos $\alpha_i \in X$ na linha i e dígitos a_{ij} na coluna j, teríamos

$$
\begin{array}{l}
\alpha_1 = 0,a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}\ a_{16}\ a_{17}\ a_{18} \dots a_{1j} \dots \\
\alpha_2 = 0,a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\ a_{25}\ a_{26}\ a_{27}\ a_{28} \dots a_{2j} \dots \\
\alpha_3 = 0,a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}\ a_{35}\ a_{36}\ a_{37}\ a_{38} \dots a_{3j} \dots \\
\alpha_4 = 0,a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ a_{44}\ a_{45}\ a_{46}\ a_{47}\ a_{48} \dots a_{4j} \dots \\
\alpha_5 = 0,a_{51}\ a_{52}\ a_{53}\ a_{54}\ a_{55}\ a_{56}\ a_{57}\ a_{58} \dots a_{5j} \dots \\
\alpha_6 = 0,a_{61}\ a_{62}\ a_{63}\ a_{64}\ a_{65}\ a_{66}\ a_{67}\ a_{68} \dots a_{6j} \dots \\
\alpha_7 = 0,a_{71}\ a_{72}\ a_{73}\ a_{74}\ a_{75}\ a_{76}\ a_{77}\ a_{78} \dots a_{7j} \dots \\
\qquad\qquad\qquad \dots \\
\alpha_i = 0,a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3}\ a_{i4}\ a_{i5}\ a_{i6}\ a_{i7}\ a_{i8} \dots a_{ij} \dots \\
\qquad\qquad\qquad \dots
\end{array}
$$

Na tabela acima, cada a_{ij} é igual a 0 (zero) ou 1 (um). Para usar o argumento da diagonal, observamos o seguinte: é possível definir um número real $\beta \in X$ com a expansão binária

$$\beta = 0, b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6\ b_7\ b_8 \ldots b_i \ldots,$$

onde $\begin{cases} b_i = 0, \ se \ \ a_{ii} = 1, \\ b_i = 1, \ se \ \ a_{ii} = 0. \end{cases}$

Então, observamos que $\beta \neq \alpha_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. De fato, $\beta \neq \alpha_1$, uma vez que $b_1 \neq a_{11}$; $\beta \neq \alpha_2$, pois $b_2 \neq a_{22}$ e, assim por diante. Portanto, f não é sobrejetora, já que não existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $f(i) = \beta$. Então, a suposição de que existe $f : \mathbb{N} \to X$ bijetora é absurda. Com isso, concluímos que X é não enumerável e, por conseguinte, $\mathbb{R}$ é não enumerável.

7. Números Complexos

7.1 Introdução

Neste Capítulo, estudaremos o conjunto dos números complexos, que é uma extensão do conjunto dos números reais.

Primeiramente, observamos que a equação $x^2+1=0$ não tem soluções no conjunto dos números reais, porque, para qualquer número real x, o número x^2 é não negativo e, portanto, x^2+1 nunca pode ser menor que 1. Apesar disso, torna-se muito útil supor a existência de um número i de modo que $i^2=-1$. Então, precisamos estender o conjunto dos números reais para um conjunto no qual possamos descobrir as soluções de uma equação do tipo $x^2+1=0$, ou seja, as raízes de um número real negativo.

7.2 Construção do Conjunto dos Números Complexos

Considere o conjunto $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$. Em $\mathbb{R}^2$, defina as seguintes operações de adição e multiplicação: Para quaisquer (a,b) e (c,d) em $\mathbb{R}^2$,
(i) $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$;
(ii) $(a,b).(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$.
Ainda por definição, dois elementos (a,b) e (c,d) em $\mathbb{R}^2$ são iguais, e escrevemos $(a,b)=(c,d)$, quando $a=c$ e $b=d$.

O $\mathbb{R}^2$, munido das operações definidas em (i) e (ii), é denominado *conjunto dos números complexos* e será denotado por $\mathbb{C}$ [10].

Na seguinte proposição, faremos uma descrição de algumas das propriedades do conjunto $\mathbb{C}$.

Proposição 7.1 As operações de adição e multiplicação, definidas em $\mathbb{C}$, satisfazem as seguintes propriedades:

i) *Associatividade*: para quaisquer $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{C}$, tem-se $((a,b)+(c,d))+(e,f) = (a,b)+((c,d)+(e,f))$ e $((a,b).(c,d)).(e,f) = (a,b).((c,d).(e,f))$;

ii) *Comutatividade*: para quaisquer $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$, tem-se $(a,b)+(c,d) = (c,d)+(a,b)$ e $(a,b).(c,d) = (c,d).(a,b)$;

iii) *Elementos neutros*: existem em $\mathbb{C}$ dois elementos $(0,0)$ e $(1,0)$ de modo que $(a,b)+(0,0) = (a,b)$ e $(a,b).(1,0) = (a,b)$, para todo $(a,b) \in \mathbb{C}$;

iv) *Inversos*: para todo $(a,b) \in \mathbb{C}$, existe um inverso aditivo $-(a,b) = (-a,-b) \in \mathbb{C}$ de modo que $(a,b)+(-(a,b)) = (0,0)$ e, se $(a,b) \neq (0,0)$. Existe também um inverso multiplicativo $(a,b)^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, -\dfrac{b}{a^2+b^2}\right) \in \mathbb{C}$ de modo que $(a,b).(a,b)^{-1} = (1,0)$;

v) *Distributividade*: para quaisquer $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{C}$, tem-se $(a,b).((c,d)+(e,f)) = (a,b).(c,d)+(a,b).(e,f)$.

Demonstração: As propriedades da proposição acima podem ser verificadas facilmente e são deixadas como exercício para o leitor.

A *subtração* de números complexos é definida em termos da adição e do inverso aditivo. Dados então $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$, definimos:

$$(a,b)-(c,d) = (a,b)+(-(c,d)) = (a-c,b-d).$$

Já o *quociente* de números complexos é definido em termos da multiplicação e do inverso multiplicativo. Considerando $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$, com $(c,d) \neq (0,0)$, definimos:

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = (a,b).(c,d)^{-1} = (a,b).\left(\frac{c}{c^2+d^2}, -\frac{d}{c^2+d^2}\right) = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

Agora vamos fazer a inclusão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ de forma natural. Para isso, considere $j:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ uma função definida por $j(x) = (x,0)$.

Proposição 7.2 A função j, definida acima, satisfaz as seguintes propriedades:
(a) j preserva as operações de adição e de multiplicação, isto é, para quaisquer $x,y \in \mathbb{R}$,

$$j(x+y) = j(x)+j(y) \ \text{ e } \ j(x.y) = j(x).j(y);$$

(b) j é injetiva.

Demonstração: (a) Para quaisquer $x,y \in \mathbb{R}$, $j(x+y) = (x+y,0) = (x,0)+(y,0) = j(x)+j(y)$ e $j(x.y) = (x.y,0) = (x.y-0.0, x.0+0.y) = (x,0).(y,0) = j(x).j(y)$.
(b) Dados $x,y \in \mathbb{R}$, se $j(x) = j(y)$, então $(x,0) = (y,0)$ e, consequentemente, $x = y$. Portanto, j é injetiva.

Com base na Proposição 7.2 e no fato que $Im(j) = \{j(x); x \in \mathbb{R}\} = \{(x,0); x \in \mathbb{R}\}$, podemos identificar $\mathbb{R}$ com $Im(j)$. Isso nos permite considerar $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Identificando cada número real x com o número complexo $(x,0)$, adotando o símbolo i para o número complexo $(0,1)$ e observado que, para todo $(a,b) \in \mathbb{C}$, $(a,b) = (a,0) + (b,0).(0,1)$, podemos escrever um número complexo $z = (a,b)$ como sendo $z = a + bi$.

Note que $(0,1)^2 = (0,1).(0,1) = (-1,0)$. Assim, $i^2 = -1$. O número complexo i é chamado de *unidade imaginária*. Dado um número complexo $z = x + yi$, x é chamado de *parte real* de z e y de *parte imaginária*, e são denotados, respectivamente, por $x = \mathfrak{Re}(z)$ e $y = \mathfrak{Im}(z)$. Um número complexo $z = x + yi$ pode ser identificado com o vetor $0z$ de componentes x e y (Figura 7.1). O *plano complexo* consiste nas representações de todos os números complexos $z = x + yi$ pelos pontos (x,y) do plano euclidiano. O plano complexo e o plano euclidiano só diferem um do outro devido ao fato de termos definido a multiplicação de números complexos, enquanto no plano euclidiano não temos tal operação [15].

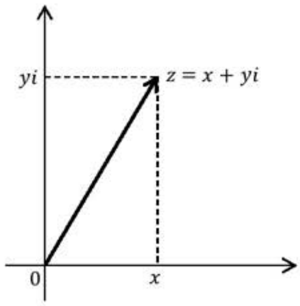


Figura 7.1: *Representação vetorial de um número complexo*

7.3 Valor Absoluto e Conjugado de um Número Complexo

O *valor absoluto* ou *módulo* de um número complexo $z = x + yi$, denotado por $|z|$, é definido como sendo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. O *complexo conjugado* de $z = x + yi$, denotado por $\bar{z}$, é definido como sendo o número complexo $\bar{z} = x - yi$ (Figura 7.2) .

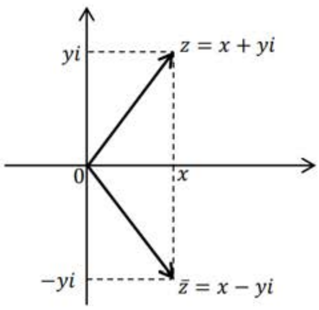


Figura 7.2: *Representação do conjugado de um número complexo*

Segue-se desses conceitos que $z.\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$. Essa propriedade permite calcular facilmente o quociente de dois números complexo z_1 e z_2, com $z_2 \neq 0$, pois

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Exemplo 7.1 Considere o número complexo

$$z = \frac{1-2i}{1+i} + (1-i)(-1+i).$$

O número z pode ser reduzido à forma $a+b\,i$, com $a,b \in \mathbb{R}$, usando o seguinte procedimento:

$$z=\frac{1-2i}{1+i}+(1-i)(-1+i)=\frac{(1-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}+(1-i)(-1+i)=\frac{1-i-2i-2}{2}+2i=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

O número z está representado, geometricamente, na figura 7.3.

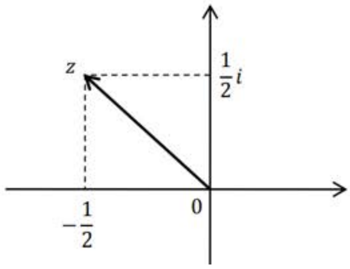


Figura 7.3: *Representação geométrica do número complexo z*

No seguinte resultado temos algumas propriedades do conjugado de um número complexo [16].

Proposição 7.3 Consindere $a \in \mathbb{R}$ e $z,\ w \in \mathbb{C}$. Então,
(i) $\overline{\overline{z}}=z$;
(ii) $z=\overline{z}$ se, e somente se, $z \in \mathbb{R}$;
(iii) $\mathfrak{Re}(a\,z)=a\,\mathfrak{Re}(z)$ e $\mathfrak{Im}(a\,z)=a\,\mathfrak{Im}(z)$;
(iv) $z+\overline{z}=2\,\mathfrak{Re}(z)$ e $z-\overline{z}=2\,i\,\mathfrak{Im}(z)$;
(v) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$ e $\overline{z.w}=\overline{z}.\overline{w}$;
(vi) $\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}=\frac{1}{\overline{w}}$, com $w \neq 0$;
(vii) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, com $w \neq 0$.

Demonstração: As propriedades da Proposição 7.3 podem ser verificadas facilmente e são deixadas a cargo do leitor.

7.4 Representação Polar de um Número Complexo

Considere a representação de um número complexo não nulo z, como na Figura 7.4 abaixo.

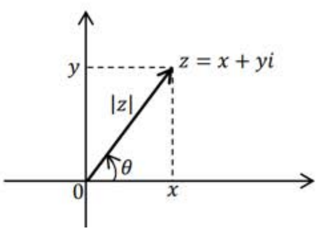


Figura 7.4: *Representação polar de um número complexo z*

Chama-se *argumento* de z ao ângulo θ formado pelo eixo $0x$ e o vetor $0z$. Os ângulos são aqui orientados de $0x$ para $0z$, considerando positivo o sentido de percurso oposto ao dos ponteiros de um relógio. Como $x = |z|cos\theta$ e $y = |z|sen\theta$, temos a *representação polar* de z dada por

$$z = r(cos\theta + i\ sen\theta),$$

em que $r = |z|$. Os números reais r e θ são as *coordenadas polares* de z.

De posse da representação polar, deduziremos uma regra muito conveniente para a multiplicação e para a divisão de dois números complexos. Considere

$$z_1 = r_1(cos\theta_1 + i\ sen\theta_1) \text{ e } z_2 = r_2(cos\theta_2 + i\ sen\theta_2),$$

dois números complexos arbitrários. Então,

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(cos\theta_1 + i\ sen\theta_1)(cos\theta_2 + i\ sen\theta_2) \\ &= r_1r_2[(cos\theta_1cos\theta_2 - sen\theta_1sen\theta_2) + i\ (sen\theta_1cos\theta_2 + sen\theta_2cos\theta_1)], \end{aligned}$$

ou seja,

$$z_1z_2 = r_1r_2[cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ sen(\theta_1 + \theta_2)].$$

Concluímos, então, que *o produto de dois números complexos é o número complexo cujo módulo é o produto dos módulos dos fatores e cujo argumento é a soma dos argumentos dos fatores* (Figura 7.5).

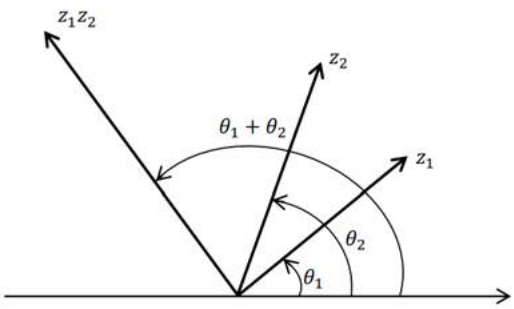


Figura 7.5: *Produto de dois números complexos na forma polar*

Usando um procedimento análogo ao da multiplicação, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\frac{cos\theta_1 + i\ sen\theta_1}{cos\theta_2 + i\ sen\theta_2} \\ &= \frac{r_1}{r_2}(cos\theta_1 + i\ sen\theta_1).[cos(-\theta_2) + i\ sen(-\theta_2)] \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,[cos(\theta_1 - \theta_2) + i\ sen(\theta_1 - \theta_2)].$$

Percebemos, assim, que *para dividir dois números complexos basta fazer o quociente dos módulos e a diferença dos argumentos* (Figura 7.6).

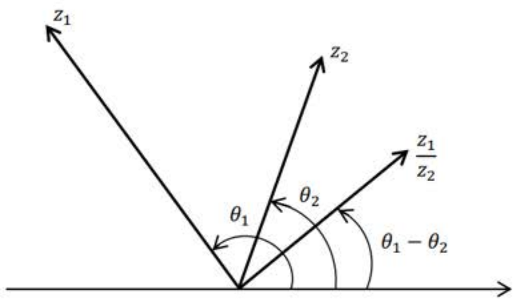


Figura 7.6: *Quociente de dois números complexos na forma polar*

Exemplo 7.2 Considere os números complexos

$$z = (-1+i)(1-\sqrt{3}i) \quad \text{e} \quad w = \frac{-1+i}{1-\sqrt{3}i}.$$

Primeiramente, temos

$$-1+i = \sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\,sen\frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{e} \quad 1-\sqrt{3}i = 2\left(cos\frac{5\pi}{3} + i\,sen\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,sen\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Como uma consequência dessas igualdades, vemos que

$$z = 2\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\,sen\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{12} + i\,sen\frac{5\pi}{12}\right)$$

e

$$w = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i\,sen\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\frac{13\pi}{12} + i\,sen\frac{13\pi}{12}\right).$$

Portanto, os argumentos de z e w são, respectivamente, $\frac{5\pi}{12}$ e $\frac{13\pi}{12}$. Veja as representações geométricas de z e w nas figuras 7.7 e 7.8.

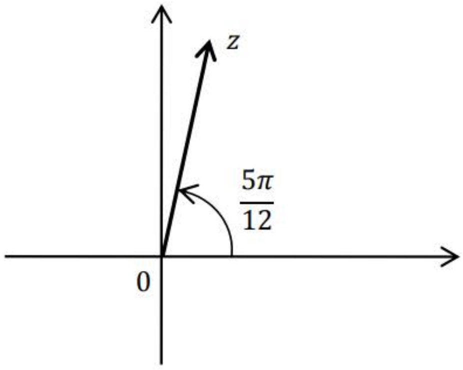


Figura 7.7: *Representação geométrica de z*

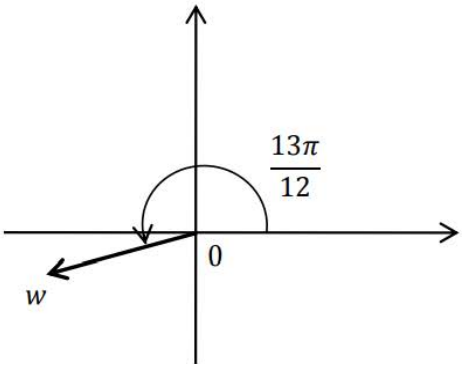


Figura 7.8: *Representação geométrica de w*

Usando o Princípio de Indução, obtemos a *Fórmula de De Moivre*:

$$(cos\theta + i\ sen\theta)^n = cos(n\theta) + i\ sen(n\theta),$$

para todo número inteiro não negativo n. Por outro lado, se n é um número inteiro negativo, então

$$(cos\theta + i\ sen\theta)^n = \frac{1}{(cos\theta + i\ sen\theta)^{-n}} = \frac{1}{cos(-n\theta) + i\ sen(-n\theta)} = cos(n\theta) + i\ sen(n\theta).$$

Portanto,

$$(cos\theta + i\ sen\theta)^n = cos(n\theta) + i\ sen(n\theta),$$

para todo número inteiro n.

Proposição 7.4 O valor absoluto de um número complexo satisfaz as seguintes propriedades:
(i) $|z| \geq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, e $|z| = 0$ se, e somente se, $z = 0$;
(ii) $|\mathfrak{Re}(z)| \leq |z|$ e $|\mathfrak{Im}(z)| \leq |z|$, para todo $z \in \mathbb{C}$;
(iii) $|z| = |-z|$, para todo $z \in \mathbb{C}$;

(iv) $|\bar{z}| = |z|$, para todo $z \in \mathbb{C}$;
(v) $|z.w| = |z||w|$, para quaisquer $z,\ w \in \mathbb{C}$;
(vi) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, para quaisquer $z,\ w \in \mathbb{C}$, com $w \neq 0$;
(vii) $|z+w| \leq |z| + |w|$, para quaisquer $z,\ w \in \mathbb{C}$;
$(viii)$ $||z| - |w|| \leq |z-w|$, para quaisquer $z,\ w \in \mathbb{C}$.

Demonstração: Demonstraremos apenas as propriedades (vii) e $(viii)$. A verificação das demais é deixada para o leitor.
(vii) Dados $z,\ w \in \mathbb{C}$, vemos que

$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = |z|^2 + z\overline{w} + \bar{z}w + |w|^2 = |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2$$

e, consequentemente,

$$|z+w|^2 = |z|^2 + 2\mathfrak{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.$$

Isso implica que $|z+w| \leq |z| + |w|$.

$(viii)$ Usando (vii), obtemos $|z| \leq |z-w| + |w|$, isto é, $|z| - |w| \leq |z-w|$. Além disso, $-(|z| - |w|) \leq |z-w|$. Dessas duas últimas desigualdades, concluímos que $||z| - |w|| \leq |z-w|$.

7.5 Raízes n-ésimas de um Número Complexo

Considere $a = |a|(cos\theta + i\ sen\theta)$ um número complexo não nulo e n um número interio maior ou igual a 2. Vamos encontrar um número complexo $z = |z|(cos\phi + i\ sen\phi)$ de modo que $\sqrt[n]{a} = z$. Então,

$$\sqrt[n]{a} = z \Leftrightarrow z^n = a \Leftrightarrow |z|^n(cos\ n\phi + i\ sen\ n\phi) = |a|(cos\theta + i\ sen\theta).$$

Como uma consequência dessas igualdades, percebemos que

$$|z| = \sqrt[n]{|a|} \quad \text{e} \quad cos(n\phi - \theta) = 1.$$

Agora, $cos(n\phi - \theta) = 1$ implica que $n\phi - \theta = 2k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$. Aplicando o algoritmo da divisão de Euclides, observamos que existem únicos $r,\ q \in \mathbb{Z}$ de modo que $k = nq + r$, com $0 \leq r < n$. Assim,

$$\phi = \frac{\theta + 2r\pi}{n} + 2q\pi, \quad cos\phi = cos\frac{\theta + 2r\pi}{n} \quad \text{e} \quad sen\phi = sen\frac{\theta + 2r\pi}{n}.$$

Portando, as raízes n-ésimas do número complexo a são dadas por

$$z_r = \sqrt[n]{|a|}\left(cos\frac{\theta + 2r\pi}{n} + i\ sen\frac{\theta + 2r\pi}{n}\right),$$

para $r = 0, \ldots, n-1$.

Observamos que as raízes n-ésimas do número complexo a são vértices de um polígono regular inscrito em uma circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{|a|}$. Com efeito, primeiramente, vemos que $|z_r| = \sqrt[n]{|a|}$, para $r = 0, \ldots, n-1$. Em segundo lugar, para $r = 1, \ldots, n$, temos

$$z_r - z_{r-1} = \sqrt[n]{|a|}\ \left(cos\frac{\theta+2r\pi}{n} + i\ sen\tfrac{\theta+2r\pi}{n}\right)\left[\left(1 - cos\frac{2\pi}{n}\right) + i\ sen\frac{2\pi}{n}\right].$$

Isso implica que

$$|z_r - z_{r-1}| = \sqrt[n]{|a|}\ \left|\left(1 - cos\frac{2\pi}{n}\right) + i\ sen\frac{2\pi}{n}\right| = \sqrt[n]{|a|}\ \sqrt{2 - 2\ cos\frac{2\pi}{n}} = 2\sqrt[n]{|a|}\ sen\frac{\pi}{n},$$

para $r = 1, \ldots, n$. Portanto, as raízes n-ésimas do número complexo a são vértices de um polígono regular inscrito em uma circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{|a|}$, cujos lados medem $2\sqrt[n]{|a|}\ sen\frac{\pi}{n}$ (Figura 7.9).

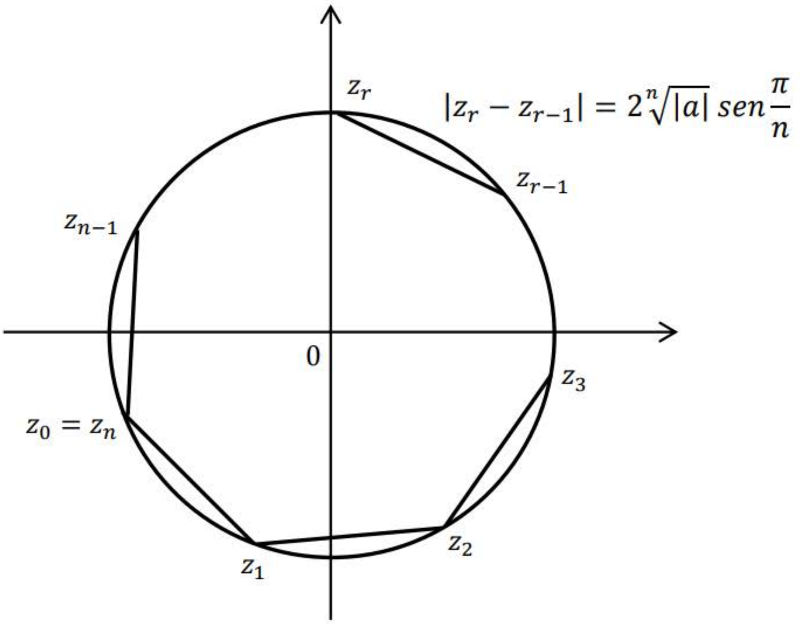


Figura 7.9: *Raízes n-ésimas de um número complexo a*

Exemplo 7.3 Considere o número complexo $a = -16$. O número a pode ser escrito como $a = 16(cos\pi + i\ sen\pi)$ e suas raízes quartas são dadas por

$$z_r = \sqrt[4]{16}\left(cos\frac{\pi+2r\pi}{4} + i\ sen\frac{\pi+2r\pi}{4}\right) = 2\left[cos\frac{(2r+1)\,\pi}{4} + i\ sen\frac{(2r+1)\,\pi}{4}\right],$$

com $r = 0, 1, 2, 3$. Isso implica que

$$z_0 = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + i\ sen\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\ \sqrt{2},$$

$$z_1 = 2\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\ sen\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\ \sqrt{2},$$

$$z_2 = 2\left(cos\frac{5\pi}{4} + i\ sen\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - i\ \sqrt{2}$$

e

$$z_3 = 2\left(cos\frac{7\pi}{4} + i\ sen\frac{7\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - i\ \sqrt{2}.$$

As raízes quartas de $a = -16$ estão representadas na figura 7.10 e são os vértices do quadrado, em que cada lado mede $2\sqrt{2}$.

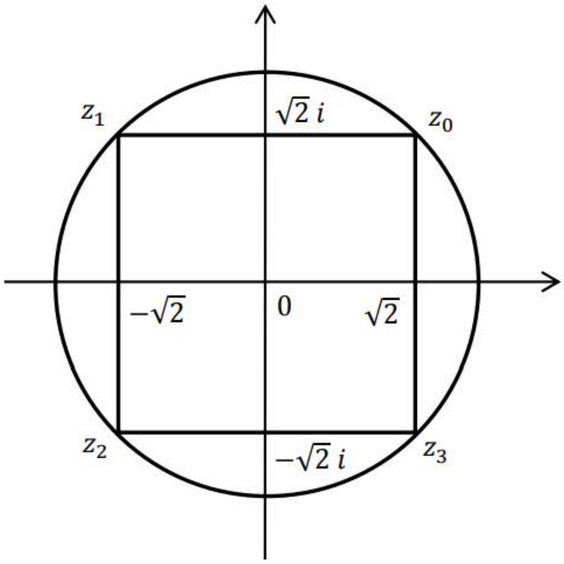


Figura 7.10: *Raízes quartas do número complexo $a = -16$*

8. Funções reais de variável real

8.1 Introdução

No Capítulo 2, definimos o que é uma função (ou aplicação), e nos Capítulos 3, 4, 5, 6 e 7 fizemos a construção dos conjuntos numéricos. Neste Capítulo, estudaremos alguns tipos de funções reais de uma variável real. Aplicamos o conceito de função ao conjunto dos números reais, nas quais são estudadas as funções polinomiais, modulares, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. Tais funções aparecem em aplicações em diversas ciências e suas particularidades são estudadas com mais profundidade num Curso de Cálculo Diferencial e Integral.

As funções desempenham um papel fundamental na descrição e modelagem de muitos fenômenos. Em vários ramos da ciência, como na Física, Biologia, Medicina ou Computação, precisamos estudar o comportamento de uma variável no decorrer de um intervalo que, nesse caso, é chamado de domínio da função. Essas variáveis, por sua vez, assumem valores reais. O conhecimento da construção dos números torna mais fácil a compreensão das funções, com uma visão geométrica, permitindo o esboço de curvas no plano.

Muitos livros de Cálculo Diferencial e Integral de uma variável começam suas discussões praticamente a partir do estudo de funções, relembrando ao leitor, num curto espaço, as propriedades dos números reais. Ao ler as breves páginas dedicadas aos números nestes livros, não obtemos uma noção clara sobre certas particularidades e propriedades dos conjuntos numéricos, e uma justificativa plausível sobre o porquê, ou a razão de existir algumas propriedades.

Neste sentido, a construção dos números torna a compreensão das funções algo mais natural, como uma consequência de tudo o que vimos e, consequentemente, torna as discussões vistas no Cálculo Diferencial e Integral uma ampliação do conceito de número. Uma vez que a noção de número foi construída, as particularidades dos conjuntos numéricos são facilmente compreensíveis à medida que os estudos vão avançando. E todo este conjunto de saberes nos leva a olhar para os livros didáticos do Ensino Médio e Fundamental com um olhar mais crítico, possibilitando a professores e estudantes criarem novas atividades que possibilitem uma compreensão mais clara sobre os fundamentos da Matemática.

8.2 Funcões polinomiais

Diz-se que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma *função polinomial* quando existem números reais $a_0,a_1,\ldots,a_n$ tais que, para todo $x\in\mathbb{R}$, tem-se

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0.$$

Se $a_n\neq 0$, dizemos que f é uma *função polinomial de grau n* [17].

Temos que $f(0)=a_0$. Geometricamente, $f(0)=a_0$ é a ordenada do ponto $(0,a_0)$, no qual a curva que representa o gráfico de f intersecta o eixo Oy.

Os valores de x para os quais se tem $f(x)=0$ são as *raízes* ou *zeros da função f*. Geometricamente, as raízes de f são os pontos $(x,0)$ nos quais a curva que representa o gráfico da função f intersecta o eixo Ox.

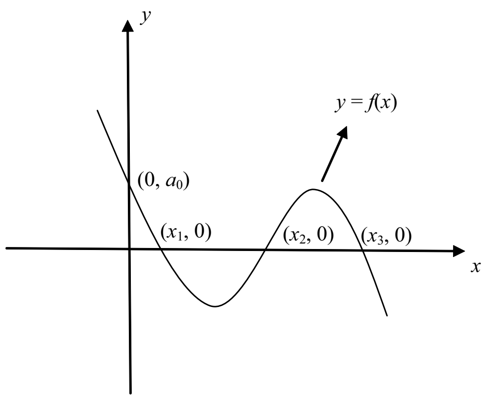


Figura 8.1: *Função Polinomial e suas raízes.*

Estudaremos, neste Capítulo, alguns casos particulares de funções polinomiais.

8.2.1 A Função Afim

Uma função polinomial $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é chamada de *função afim* quando existem constantes $a,b\in\mathbb{R}$ tais que $f(x)=ax+b$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

Exemplo 8.1 A *função identidade* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=x$, para todo $x\in\mathbb{R}$, é uma função afim. São também casos particulares de funções afins as *funções lineares* definidas por $f(x)=ax$ e as funções constantes $f(x)=b$.

O gráfico de uma função afim $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax+b$ é representado por uma reta. Para a verificação desse fato, basta mostrar que quaisquer três pontos

$P_1=(x_1,ax_1+b),P_2=(x_2,ax_2+b)$ e $P_3=(x_3,ax_3+b)$ desse gráfico são colineares. Mais precisamente, denotando por $d_{P,Q}$ como sendo a distância entre dois pontos P e Q, devemos mostrar que a distância de P_1 a P_3 é igual a distância de P_1 a P_2 mais a distância de P_2 a P_3, isto é, $d_{P_1,P_3}=d_{P_1,P_2}+d_{P_2,P_3}$. De fato,

$$d_{P_1,P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+[ax_2+b-(ax_1+b)]^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+a^2(x_2-x_1)^2}$$

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2(1+a^2)}=(x_2-x_1)\sqrt{1+a^2},$$

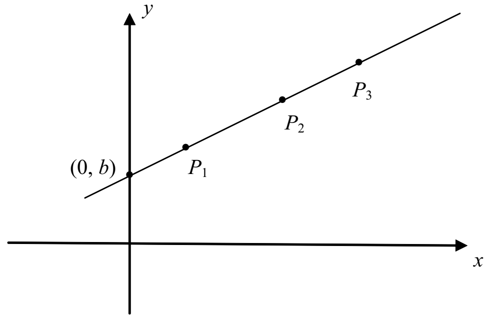


Figura 8.2: *Gráfico da Função Afim.*

Analogamente, temos

$$d_{P_2,P_3} = (x_3 - x_2)\sqrt{1+a^2}$$

e

$$d_{P_1,P_3} = (x_3 - x_1)\sqrt{1+a^2}.$$

Assim,

$$d_{P_1,P_2} + d_{P_2,P_3} = (x_2 - x_1)\sqrt{1+a^2} + (x_3 - x_2)\sqrt{1+a^2}$$

$$= (x_2 - x_1 + x_3 - x_2)\sqrt{1+a^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{1+a^2} = d_{P_1,P_3}.$$

Do ponto de vista geométrico, o número real b é a ordenada do ponto no qual a reta, que representa o gráfico da função f, intersecta o eixo Oy. Esse número é chamado *coeficiente linear* da reta.

O número real a chama-se *inclinação* ou *coeficiente angular* da reta (em relação ao eixo horizontal Ox). Quanto maior o valor de a, em módulo, mais a reta se afasta da posição horizontal. Quando $a > 0$, o gráfico de f é uma reta ascendente e, quando $a < 0$, a reta é descendente. Dizemos que, quando $a > 0$, a função f é *crescente*; quando $a < 0$, f é *decrescente*.

Exemplo 8.2 O gráfico da *função constante*, dada por $f(x) = k, k \in \mathbb{R}$, é uma reta paralela ao eixo Ox. Veja Figura 8.3 (a): $k > 0$ e Figura 8.3 (b): $k < 0$.

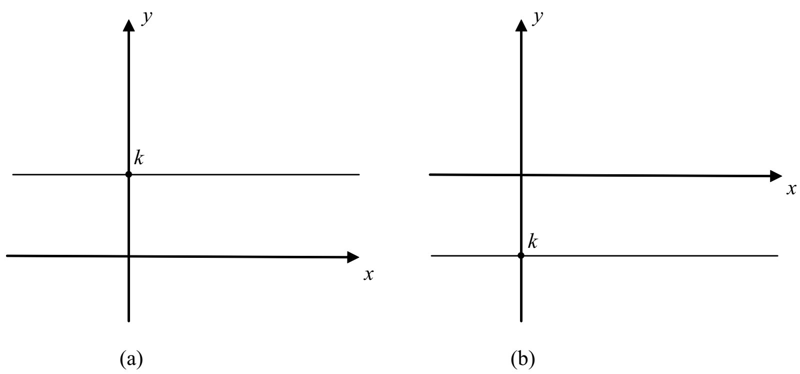


Figura 8.3: *Gráfico da Função Constante*

Como o gráfico de uma função afim dada por $f(x) = ax + b$ é representado por uma reta, quaisquer dois pontos $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ são suficientes para o esboço do seu gráfico. Porém, dois pontos se destacam por serem mais frequentemente utilizados: o intercepto x e o intercepto y, que são os pontos nos quais a reta intersecta o eixo Ox e o eixo Oy, respectivamente; isto é, o ponto $\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)$ e o ponto $(0, b)$, respectivamente.

Exemplo 8.3 Para a função afim dada por $f(x) = 2x+4$, temos $2x+4 = 0$ se, e somente se, $x = -2$. Assim, o intercepto x é o ponto $(-2,0)$ e o intercepto y é o ponto $(0,4)$. Além disso, como $a > 0$, a função é crescente e $f(x) > 0$, para todo $x > -2$ e $f(x) < 0$, para todo $x < -2$. O gráfico dessa função é representado pelo esboço abaixo (Figura 8.4).

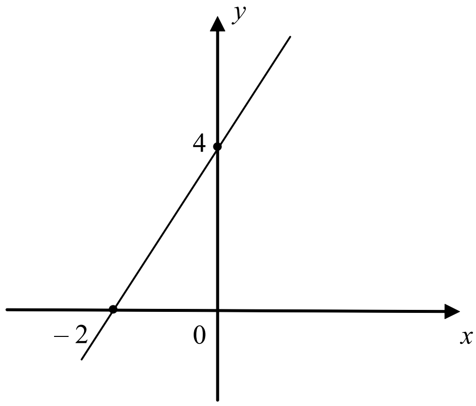


Figura 8.4: *Gráfico da Função* $f(x) = 2x+4$

Exemplo 8.4 O esboço do gráfico da função afim f, definida por $f(x) = -x-2$, é dado pela Figura 8.5. Note que a raiz da função é $x = -2$ e que o seu coeficiente linear é $b = -2$. A função é decrescente, uma vez que $a < 0$. Além disso, $f(x) > 0, \forall\, x < -2$ e $f(x) < 0, \forall\, x > -2$.

Exemplo 8.5 Para resolver a inequação $(2x+4)(x-1) \geq 0$, basta observar a representação gráfica das funções dadas por $f(x) = 2x+4$ e $g(x) = x-1$. Temos que ambas as funções, f e g, são crescentes. Assim, $f(x) \geq 0$, para $x \geq -2$ e $f(x) \leq 0$, para $x \leq -2$; $g(x) \geq 0$, para $x \geq 1$ e $g(x) \leq 0$, para $x \leq 1$. Portanto, $f(x)g(x) \geq 0$ para $x \leq -2$, uma vez que ambas as funções não são positivas, nesse intervalo, e para $x \geq 1$, uma vez que, nesse intervalo, ambas as funções não são negativas. Note que, para $-2 < x < 1$, $f(x)$ é positivo e $g(x)$ é negativo, o que acarreta $f(x)g(x) < 0$. Portanto, $x \in (-\infty, -2] \cup [1, \infty)$. Um esquema para facilitar a visualização da solução é dado pela Figura 8.6.

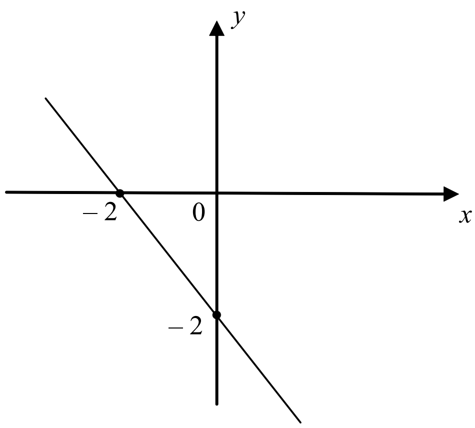


Figura 8.5: *Gráfico da função* f*, dada por* $f(x) = -x-2$.

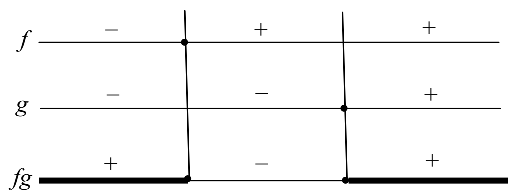


Figura 8.6: *Esquema para resolução da inequação* $(2x+4)\cdot(x-1) \geq 0$.

Exemplo 8.6 Resolver a inequação

$$\frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{1-x}.$$

Resolução:

$$\frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{1-x} \iff \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{1-x} \leq 0 \iff \frac{-3x}{(2x+1)(1-x)} \leq 0.$$

Façamos $f(x) = -3x$, $g(x) = 2x+1$ e $h(x) = 1-x$. As raízes de f, g e h são, respectivamente, 0, $-\frac{1}{2}$ e 1. Note que devemos ter $g(x) \neq 0$ e $h(x) \neq 0$, uma vez que não há divisão por zero. Temos que $f(x) < 0$ para $x > 0$ e $f(x) > 0$ para $x < 0$, uma vez que f é decrescente; $g(x) < 0$ para $x < -\frac{1}{2}$ e $g(x) > 0$ para $x > -\frac{1}{2}$, uma vez que g é crescente; $h(x) < 0$ para $x > 1$ e $h(x) > 0$ para $x < 1$, uma vez que h é decrescente. Assim, para $x < -\frac{1}{2}$, $f(x) > 0$, $g(x) < 0$ e $h(x) > 0$, o que produz $\frac{f(x)}{g(x)h(x)} < 0$; para $-\frac{1}{2} < x \leq 0$, $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ e $h(x) > 0$, o que produz $\frac{f(x)}{g(x)h(x)} \geq 0$; para $0 < x < 1$, $f(x) < 0$, $g(x) > 0$ e $h(x) > 0$, o que produz $\frac{f(x)}{g(x)h(x)} < 0$; para $x > 1$, $f(x) < 0$, $g(x) > 0$ e $h(x) < 0$, o que produz $\frac{f(x)}{g(x)h(x)} > 0$. Portanto, $\frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{1-x}$ para todo $x < -\frac{1}{2}$ ou para todo $0 \leq x < 1$, ou seja, $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup [0,1)$.

8.2.2 Função Linear e Proporcionalidade

A *função linear* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada pela fórmula $f(x) = ax$, é o modelo matemático para problemas de proporcionalidade [17].

Uma *proporcionalidade* é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números reais c e x, tem-se $f(cx) = cf(x)$ (proporcionalidade direta). Se $f(cx) = cf(x)$ para todo c e para todo x, então, escrevendo $a = f(1)$, tem-se $f(c) = f(c.1) = ca$, ou seja, $f(c) = ac$, para todo $c \in \mathbb{R}$. Temos então $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, f é uma função linear.

Nota 8.1 A *proporcionalidade inversa* é dada pela função definida por $f(x) = \frac{a}{x}$.

Nota 8.2 Só é possível empregar a regra de três se a função em questão é uma função linear (proporcionalidade direta) ou se a função é dada como na nota anterior (proporcionalidade inversa).

8.2.3 A Função Quadrática

Uma função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de *função quadrática* quando existem constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposição 8.1 [17] Sejam f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções definidas por $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$. Se f e g assumem os mesmos valores, em três pontos distintos x_1, x_2 e x_3, então essas funções são iguais, isto é, assumem o mesmo valor para qualquer número real x .

Demonstração: Suponhamos que as funções f e g, dadas por $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$, assumam os mesmos valores para três números reais distintos x_1, x_2 e x_3, ou seja, $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$ e $f(x_3) = g(x_3)$. Então $f(x_1) - g(x_1) = 0$, $f(x_2) - g(x_2) = 0$ e $f(x_3) - g(x_3) = 0$. Escrevendo $\alpha = a - a'$, $\beta = b - b'$ e $\gamma = c - c'$, temos

$$\begin{cases} \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = 0 \\ \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma = 0 \\ \alpha x_3^2 + \beta x_3 + \gamma = 0 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação de cada uma das outras, no sistema acima, tem-se

$$\alpha(x_2^2 - x_1^2) + \beta(x_2 - x_1) = 0$$

e

$$\alpha(x_3^2 - x_1^2) + \beta(x_3 - x_1) = 0.$$

Como $x_2 - x_1 \neq 0$ e $x_3 - x_1 \neq 0$, podemos dividir a primeira dessas equações por $x_2 - x_1$; e a segunda, por $x_3 - x_1$, obtendo

$$\alpha(x_1 + x_2) + \beta = 0$$

e

$$\alpha(x_1 + x_3) + \beta = 0.$$

Subtraindo membro a membro, temos

$$\alpha(x_3 - x_2) = 0.$$

Como $(x_3 - x_2) \neq 0$, resulta que $\alpha = 0$. Substituindo nas equações anteriores, obtemos sucessivamente $\beta = 0$ e $\gamma = 0$. Portanto, $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$.

Proposição 8.2 A equação do segundo grau, a uma incógnita

$$ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0,$$

tem as soluções

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Demonstração: Considere $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Então, dividindo todos os termos por a, obtemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Completando quadrados, temos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros , resulta

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

de onde

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A fórmula acima é conhecida como fórmula resolutiva da equação de segundo grau.

O termo $\Delta = b^2 - 4ac$ é conhecido como *discriminante* da equação do segundo grau. Se $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais distintas; se $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais; e se $\Delta = 0$, as duas raízes são iguais (ou seja, a equação possui uma única raiz real).

Nota 8.3 Para a resolução de uma equação de segundo grau, não é obrigatório o uso da fórmula resolutiva. Como vimos na demonstração da Proposição 8.2, podemos utilizar a técnica de completar quadrados, conforme o exemplo a seguir.

Exemplo 8.7 $x^2 - 3x + 2 = 0 \iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = 0 \iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \iff x - \frac{3}{2} = \pm\frac{1}{2} \iff$
$x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \iff x = 2$ ou $x = 1$.

Proposição 8.3 Na equação do segundo grau a uma incógnita

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0,$$

a soma das raízes é $S=-\dfrac{b}{a}$ e o produto das raízes é $P=\dfrac{c}{a}$.

Demonstração: Sejam

$$r_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

e

$$r_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$, com $a\neq 0$. Então,

$$S=r_1+r_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

e

$$P=r_1\cdot r_2=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

Em decorrência da Proposição 8.3, se $a=1$, então a equação quadrática $x^2+bx+c=0$ pode ser escrita na forma $x^2-Sx+P=0$. Em particular, se $\Delta>0$, a média das raízes é $-b/2a$, ou seja, as raízes r_1 e r_2 são equidistantes do ponto $-b/2a$. Se $\Delta=0$, a equação possui uma única raiz (raiz dupla), igual a $-b/2a$. Se $\Delta<0$, a equação possui duas raízes complexas conjugadas e, ainda assim, a média das raízes é $-b/2a$.

Proposição 8.4 Seja a equação quadrática $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$. Então, r é uma das raízes da equação se, e somente se, $x-r$ é um fator do primeiro membro.

Demonstração: Seja $f(x)=ax^2+bx+c$. Como r é uma raiz de $f(x)=0$, podemos escrever

$$f(r)=ar^2+br+c=0.$$

Temos

$$f(x)-f(r)=ax^2+bx+c-(ar^2+br+c),$$

ou seja,

$$f(x)-0=a(x^2-r^2)+b(x-r).$$

Onde

$$f(x)=(x-r)[a(x+r)+b],$$

o que nos diz que $x-r$ é um fator de $f(x)$.

Reciprocamente, se $x-r$ é um fator de $f(x)$, podemos escrever

$$f(x)=(x-r)P(x),$$

em que $P(x)$ é o outro fator.

Para $x=r$, esta última relação nos diz que $f(r)=0$, o que significa que r é uma raiz de $f(x)=0$.

Sejam r_1 e r_2 raízes da equação quadrática $ax^2+bx+c=0$. Pela Proposição 8.4, $x-r_1$ e $x-r_2$ são fatores de ax^2+bx+c. Assim,

$$(x-r_1)(x-r_2)=\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Donde

$$(x-r_1)(x-r_2) = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2},$$

ou seja,

$$(x-r_1)(x-r_2) = x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = \frac{1}{a}(ax^2+bx+c).$$

Logo, podemos escrever a função quadrática $f(x) = ax^2+bx+c$ na forma fatorada

$$f(x) = a(x-r_1)(x-r_2).$$

Exemplo 8.8 Fatorar $f(x) = 6x^2-5x-6$. Resolução: As raízes de $6x^2-5x-6=0$ são

$$x = \frac{5\pm\sqrt{25+144}}{12} = \frac{5\pm 13}{12}.$$

Isso implica que

$$r_1 = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

e

$$r_2 = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}.$$

Portanto,

$$f(x) = 6\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right) = 2\cdot 3\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right) = (2x-3)(3x+2).$$

Exemplo 8.9 Encontrar a equação quadrática cujas raízes são $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{4}$.
Resolução: A equação pode ser expressa na forma

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right) = 0.$$

Então, ela é dada por

$$x^2-\frac{3}{4}x-\frac{4}{3}x+1 = 0,$$

ou seja,

$$x^2-\frac{25}{12}x+1 = 0$$

e, consequentemente,

$$12x^2-25x+12 = 0.$$

Nota 8.4 A equação do Exemplo 8.9 pode ser obtida também utilizando-se a fórmula $x^2-Sx+P=0$ de soma e produto das raízes.

Proposição 8.5 A função quadrática $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=ax^2+bx+c$, assume o mesmo valor $f(x)=f(x')$ para $x\neq x'$ se, e somente se, x e x' são equidistantes de $-b/2a$.

Demonstração: Seja

$$f(x) = ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}.$$

Assim, $f(x)=f(x')$ se, e somente se,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x'+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Agora, observe que

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(x'+\frac{b}{2a}\right)^2 \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(x'+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \iff$$

$$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\left(x'+\frac{b}{2a}\right)\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\left(x'+\frac{b}{2a}\right)\right]=0 \iff (x-x')\left[(x+x')+\frac{b}{a}\right]=0.$$

Como $x \neq x'$, obtemos

$$x+x'=-\frac{b}{a} \iff \frac{x+x'}{2}=-\frac{b}{2a}.$$

Proposição 8.6 A função quadrática $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=ax^2+bx+c$, assume um valor máximo ou mínimo igual a $c-b^2/4a=-\Delta/4a$, quando $x=-b/2a$. Esse valor é máximo, quando $a<0$, e é mínimo, quando $a>0$.

Demonstração: Vimos que $f(x)=ax^2+bx+c$ pode ser escrita como

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}.$$

Examinemos essa última relação para os casos $a>0$ e $a<0$.
Se $a>0$, então a primeira parcela é sempre não negativa e as demais são constantes. Como a primeira parcela depende de x, a função não possui um valor máximo, já que pode se tornar tão grande quanto se queira, bastando para isso tomar um valor (absoluto) suficientemente grande para x. Mas tem um valor mínimo, quando

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0,$$

ou seja, para $x=-b/2a$. Esse valor mínimo é

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=c-\frac{b^2}{4a}=-\frac{\Delta}{4a}.$$

Se $a<0$, então a primeira parcela é sempre não positiva e as demais são constantes. Como a primeira parcela depende de x, a função não possui um valor mínimo, bastando para isso tomar um valor suficientemente grande para x. Mas tem um valor máximo para $x=-b/2a$ que é

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}.$$

8.2.4 Gráfico da Função Quadrática

O gráfico da função quadrática $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=ax^2+bx+c$, é uma curva denominada *parábola*. Se $a>0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima e se $a<0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo, como na Figura 8.7.

De acordo com o que vimos até agora, a parábola que representa a função quadrática $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=ax^2+bx+c$, é simétrica em relação à reta de equação $x=-b/2a$. A reta de equação $x=-b/2a$ é chamada *eixo de simetria* da parábola. O ponto V é chamado *vértice* da parábola e tem coordenadas $V=(-b/2a,-\Delta/4a)$; se $a>0$, V recebe o nome de ponto de mínimo e sua ordenada $y=-\Delta/4a$ representa o valor mínimo que a função quadrática pode assumir; se $a<0$, V se chama ponto máximo e sua ordenada $y=-\Delta/4a$ representa o valor máximo que a função quadrática pode assumir.
Além disso, se $\Delta>0$, a função tem duas raízes reais distintas; isso significa que o gráfico corta o eixo Ox

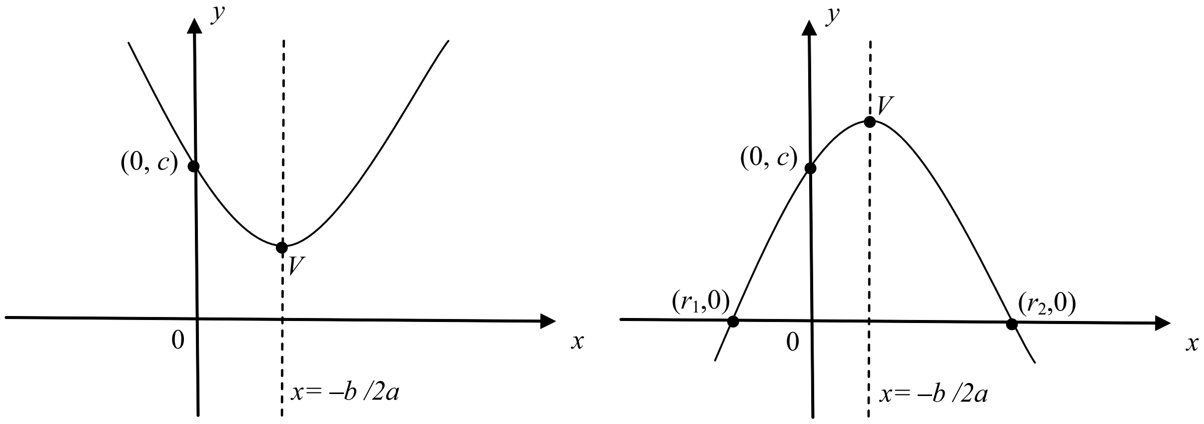


Figura 8.7: *Gráfico de uma função quadrática f, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $a > 0$ e $a < 0$.*

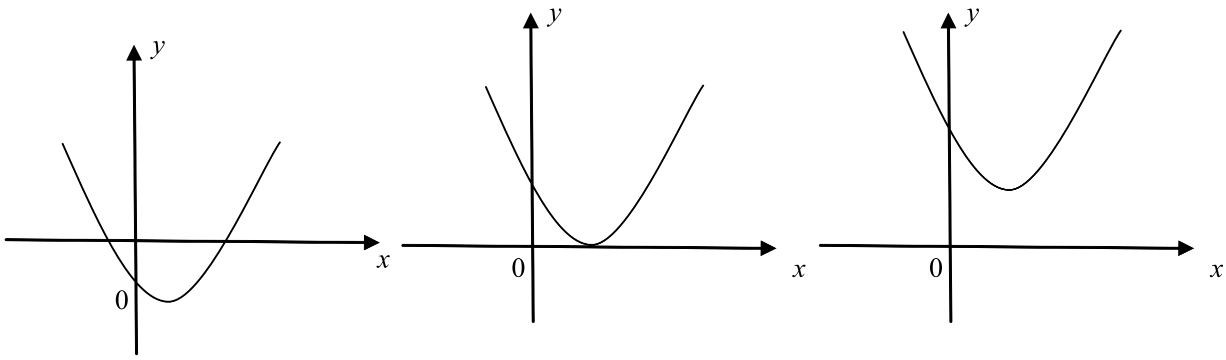


Figura 8.8: *Esboço do gráfico de uma função quadrática, quando $a > 0$, para $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$.*

em dois pontos distintos. Se $\Delta = 0$, há uma única raiz (raiz dupla), o que significa que o gráfico da função apenas tangencia o eixo Ox. Se $\Delta < 0$, a função não possui raízes reais, o que significa que o gráfico da função não toca o eixo Ox. Veja Figura 8.8.

Assim, ao elaborar o esboço do gráfico de uma função quadrática, muitas vezes é importante destacar os pontos V, o intercepto y (o ponto de ordenada c) e os interceptos x (os pontos cujas abscissas são as raízes da função), se existirem.

8.3 Função Modular

Antes de definir função modular, vamos recordar o conceito de módulo ou valor absoluto dado na Definição 6.7.

8.3.1 Módulo ou Valor Absoluto de um Número Real

Definição 8.1 Dado $x \in \mathbb{R}$, define-se o *módulo* ou *valor absoluto* de x, que se indica por $|x|$, como sendo

$$|x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0, \\ -x, & se\ x < 0. \end{cases}$$

Nota 8.5 Geometricamente, o módulo de x é a distância de x ao zero.

Exemplo 8.10 Com base no conceito de módulo, temos:

a) $|5| = 5$;

b) $|0| = 0$;

c) $|-3| = -(-3) = 3$.

Proposição 8.7 Decorrem da Definição 8.1 as seguintes propriedades:

a) $|x| \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$;

b) $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$;

d) $|x|^2 = x^2, \forall\, x \in \mathbb{R}$;

e) $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$;

f) $||x| - |y|| \leq |x - y|, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$;

g) $|x| \leq r$ se, e somente se, $-r \leq x \leq r$, para quaisquer $x, r \in \mathbb{R}$, com $r > 0$;

h) $|x| \geq r$ se, e somente se, $x \leq -r$ ou $x \geq r$, para quaisquer $x, r \in \mathbb{R}$, com $r > 0$.

Demonstração: Demonstraremos somente a propriedade g). A demonstração das demais propriedades é deixada como exercício. Considere $x \in \mathbb{R}$.
Se $x \geq 0$, então

$$|x| \leq r \iff x \leq r \iff -r < 0 \leq x \leq r \iff -r < x \leq r.$$

Agora, se $x < 0$, vemos que

$$|x| \leq r \iff -x \leq r \iff -r \leq x < 0 < r \iff -r \leq x < r.$$

Portanto, a demonstração do item g) está completa.

Nota 8.6 As propriedades g) e h) da Proposição 8.7 continuam válidas se trocarmos $\leq$ por $<$, ou seja, dados x, $r \in \mathbb{R}$, com $r > 0$, temos:

i) $|x| < r \iff -r < x < r$;

ii) $|x| > r \iff x < -r$ ou $x > r$.

8.3.2 Função Modular

Definição 8.2 A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$, recebe o nome de *função modular*.

O gráfico da função modular é a reunião de duas semirretas de origem 0, que são as bissetrizes do primeiro e do segundo quadrantes. Veja a representação do gráfico da função modular na Figura 8.9.

8.3.3 Equações e Inequações Modulares

Considere $r \in \mathbb{R}$, com $r > 0$. Dado $x \in \mathbb{R}$, segue-se, da definição de módulo, que

$$|x| = r \iff x = r \text{ ou } x = -r$$

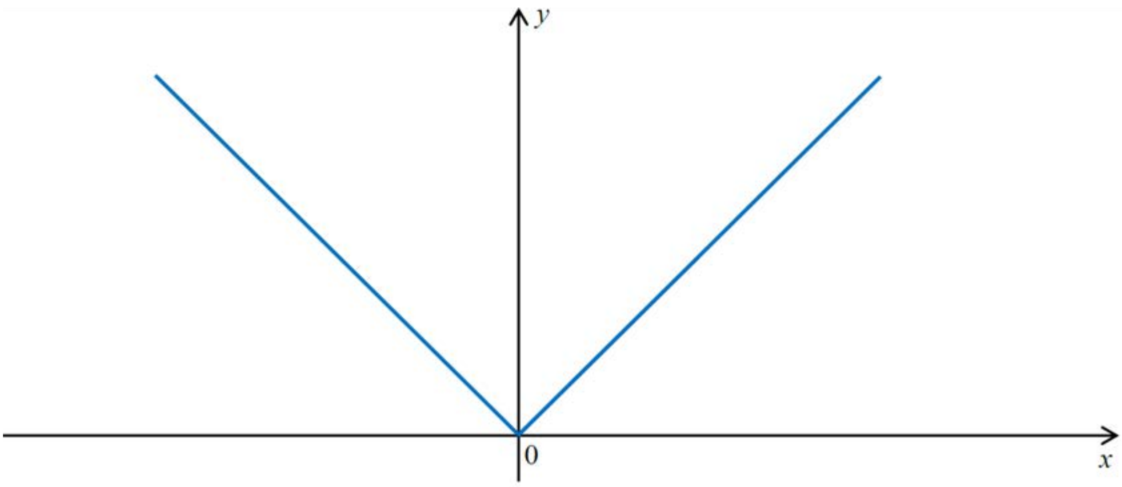


Figura 8.9: *Gráfico da função modular.*

Exemplo 8.11 Resolva cada equação modular dada a seguir.

a) $|3x+2| = 4$

b) $|2x-3| = 3x-1$

Resolução:

a) $|3x+2| = 4 \iff 3x+2 = 4$ ou $3x+2 = -4 \iff 3x = 2$ ou $3x = -6 \iff x = \frac{2}{3}$ ou $x = -2$.
Portanto, $|3x+2| = 4$ se, e somente se, $x = \frac{2}{3}$ ou $x = -2$.

b) Primeiramente, notamos que se $|2x-3| = 3x-1$, então $3x-1 \geq 0$, ou seja, $x \geq \frac{1}{3}$. Por outro lado, temos:
$|2x-3| = 3x-1 \iff 2x-3 = 3x-1$ ou $2x-3 = -3x+1 \iff -x = 2$ ou $5x = 4 \iff x = -2$ ou $x = \frac{4}{5}$.
Logo, $|2x-3| = 3x-1$ se, e somente se, $x = \frac{4}{5}$.

Exemplo 8.12 Resolva as inequações seguintes.

a) $|x-2| < 1$

b) $|x-3| \leq 2$

c) $|x+4| < 1$

d) $|x+2| > 3$

e) $|2x+6| < 8$

f) $|3x+2| \geq 4$

Resolução: A solução de cada inequação será obtida mediante a aplicação dos itens g) e h) da Proposição 8.7 e da Nota 8.6.

a) $|x-2| < 1 \iff -1 < x-2 < 1 \iff -1+2 < (x-2)+2 < 1+2 \iff 1 < x < 3$.
Assim, $|x-2| < 1$ se, e somente se, $1 < x < 3$.

b) $|x-3| \leq 2 \iff -2 \leq x-3 \leq 2 \iff 1 \leq x \leq 5$.
Portanto, $|x-3| \leq 2$ se, e somente se, $1 \leq x \leq 5$.

c) $|x+4| < 1 \iff -1 < x+4 < 1 \iff -5 < x < -3$.
Então, $|x+4| < 1$ se, e somente se, $-5 < x < -3$.

d) $|x+2| > 3 \iff x+2 < -3$ ou $x+2 > 3 \iff x < -5$ ou $x > 1$.
Consequentemente, $|x+2| > 3$ se, e somente se, $x < -5$ ou $x > 1$.

e) $|2x+6| < 8 \iff |2\cdot(x+3)| < 8 \iff |2|\cdot|x+3| < 8 \iff 2\cdot|x+3| < 8 \iff |x+3| < 4 \iff -4 < x+3 < 4 \iff -7 < x < 1$.
Logo, $|2x+6| < 8$ se, e somente se, $-7 < x < 1$.

f) $|3x+2| \geq 4 \iff 3x+2 \leq -4$ ou $3x+2 \geq 4 \iff 3x \leq -6$ ou $3x \geq 2 \iff x \leq -2$ ou $x \geq \frac{2}{3}$.
Desse modo, $|3x+2| \geq 4$ se, e somente se, $x \leq -2$ ou $x \geq \frac{2}{3}$.

8.4 Funções Exponencial e Logarítmica

Nesta seção, discutiremos as propriedades de potenciação e logaritmos, bem como as funções exponenciais e logarítmicas, conforme apresentado em ([18], [19]).

8.4.1 Propriedades de Potenciação

Dados $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$, definimos a potência n-ésima de a da seguinte forma:

$$a^1 = a \text{ e } a^n = a^{n-1} \cdot a, \text{ se } n \geq 2.$$

Se $a \neq 0$,

$$a^0 = 1 \text{ e } a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ se } n \geq 1.$$

Quando $n \in \mathbb{N}$,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ vezes}},$$

ou seja, a elevado ao número natural n significa multiplicar o número a por ele mesmo n vezes. O número a é chamado de base, e n é chamado de expoente.

Exemplo 8.13

a) $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$;

b) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Proposição 8.8 Considere a e b números reais positivos. Então, para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, são válidas as seguintes propriedades de potenciação:

a) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

b) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$;

c) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.

Demonstração: A demonstração dessas propriedades é feita por indução:

a) Seja $X = \{n \in \mathbb{N}; a^x \cdot a^n = a^{x+n}\}$, em que a é um número real positivo. Vemos que $1 \in X$, pois $a^x \cdot a^1 = a^x \cdot a = a^{x+1}$, pela própria definição. Supondo que $k \in X$, como hipótese de indução, temos $a^x \cdot a^k = a^{x+k}$. Queremos mostrar que $k+1 \in X$. De fato,

$$a^x \cdot a^{k+1} = a^x \cdot (a^k \cdot a) = (a^x \cdot a^k) \cdot a = a^{x+k} \cdot a = a^{(x+k)+1} = a^{x+(k+1)}.$$

Portanto, $k+1 \in X$. Dessa forma, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, para todo número real $a > 0$ e para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$. Deixaremos como exercício a demonstração dos itens $b)$ e $c)$.

Nota 8.7 A Proposição 8.8 pode ser estendida para expoentes inteiros.

Exemplo 8.14

a) $2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{2 \cdot 2} = \dfrac{1}{4}$;

b) $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \dfrac{1}{8}$.

Proposição 8.9 Considere a e b números reais positivos e $x, y \in \mathbb{Z}$. Então, são válidas as seguintes propriedades de potenciação:

a) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

b) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$;

c) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$;

d) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

Demonstração: a) Considerando $x > 0$ e $y > 0$, recaímos no item $a)$ da Proposição 8.8. Se $x < 0$ e $y < 0$, então $-x > 0$ e $-y > 0$, assim,

$$a^x \cdot a^y = \frac{1}{a^{-x}} \cdot \frac{1}{a^{-y}} = \frac{1}{a^{-x-y}} = \frac{1}{a^{-(x+y)}} = a^{x+y}.$$

A igualdade também se verifica para os demais valores de x e de y.

d)

$$\frac{a^x}{a^y} = a^x \cdot \frac{1}{a^y} = a^x \cdot a^{-y} = a^{x-y}.$$

Deixaremos como exercício a demonstração das propriedades $b)$ e $c)$.

Nota 8.8 A divisão de um número não nulo por ele mesmo é igual a 1, ou seja, $\dfrac{a^x}{a^x} = 1$. Dessa forma, pela propriedade $d)$ da Proposição 8.9, temos $a^{x-x} = 1$ e, portanto, $a^0 = 1$. [8].

Definição 8.3 Considere $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, e $n \in \mathbb{N}$. Definimos a raiz n-ésima de a como sendo o número real positivo b, tal que $b^n = a$, que escrevemos como $b = \sqrt{a}$. Esse conceito pode ser estendido para números reais negativos, desde que n seja um número natural ímpar.

Exemplo 8.15

a) $\sqrt{16} = \pm 4$, pois $(+4)^2 = (+4) \cdot (+4) = 16$ e $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$;

b) $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$.

Proposição 8.10 Considere a e b números reais positivos. Se $m, n, p \in \mathbb{N}$, então

a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$;

b) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$;

c) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$;

d) $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}) = \sqrt[m \cdot n]{a}$;

e) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[p \cdot n]{a^{p \cdot m}}$.

Demonstração: a) Se $x = \sqrt[n]{a}$ e $y = \sqrt[n]{b}$, então $x^n = a$ e $y^n = b$. Logo, $a \cdot b = x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$. Como $x \cdot y > 0$, concluímos que $x \cdot y = \sqrt[n]{a \cdot b}$. Portanto, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = x \cdot y = \sqrt[n]{a \cdot b}$.

Deixamos como exercício a demonstração dos itens b), c), d) e e).

Nota 8.9 O expoente pode ser um número natural, inteiro, racional ou irracional e cabe ao leitor verificar as demais possibilidades.

8.4.2 Função Exponencial

Considere o seguinte problema para motivar o conceito de função exponencial: Em 2014, R$ 200,00 foram depositados numa conta poupança, com um rendimento anual de $3,4\%$ ao ano. Qual será o valor obtido em 5 anos? Para isto, vamos esquematizar os cálculos numa tabela.

Ano	Saldo	Rendimentos	Operações
2014	200,00	0	-
2015	206,80	6,80	$200 + 200(0,034) = 200(1,034)$
2016	213,83	7,03	$200(1,034) + 200(1,034)(0,034) = 200(1,034)^2$
2017	221,10	7,27	$200(1,034)^2 + 200(1,034)^2(0,034) = 200(1,034)^3$
2018	228,62	7,52	$200(1,034)^3 + 200(1,034)^3(0,034) = 200(1,034)^4$
2019	236,39	7,77	$200(1,034)^4 + 200(1,034)^4(0,034) = 200(1,034)^5$

Continuando este processo, depois de n anos, o saldo na conta será igual a $S = 200(1,034)^n$. Ou seja, o valor acumulado é de aproximadamente R$236,39. A aplicação bancária $S = 200(1,034)^n$ é um exemplo prático de uma função exponencial F, definida por $F(x) = 200(1,034)^x$, $x \in \mathbb{R}$, restrita ao conjunto dos números inteiros não negativos. Nesse caso, o valor constante $1,034$ é chamado de base, e x é chamado de expoente.

Definição 8.4 Considere $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Diz-se que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x$ é uma *função exponencial* na base a e expoente x.

Exemplo 8.16 O esboço do gráfico da função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2^x$, é dado na Figura 8.10.

De forma análoga, consideramos a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, cujo gráfico está representado na Figura 8.11.

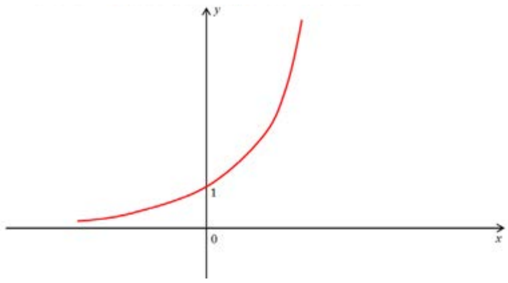


Figura 8.10: *Função exponencial na base* 2.

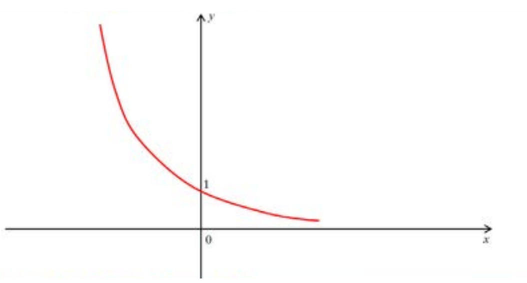


Figura 8.11: *Função exponencial na base* $1/2$.

8.4.3 Função Exponencial Natural

A *função exponencial natural* é definida por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = e^x$, em que $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. A base é o número de Euler e e x é um número real qualquer. O número e é irracional e seu valor é de aproximadamente $2,718281828$, com nove casas decimais. Ele é chamado de número de Euler, em homenagem ao matemático Suíço Leonhard Euler.

O número e é o número para o qual tende a quantidade $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, quando o módulo de x, $|x|$, assume valores suficientemente grandes. Esse número aparece na modelagem de muitos fenômenos naturais, físicos e econômicos, facilitando muitos cálculos, como veremos em alguns exemplos. Os gráficos da função exponencial natural f, dada por $f(x) = e^x$, e da função $g :]-\infty, -1[\, \cup\,]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, estão representados nas figuras 8.12 e 8.13, respectivamente.

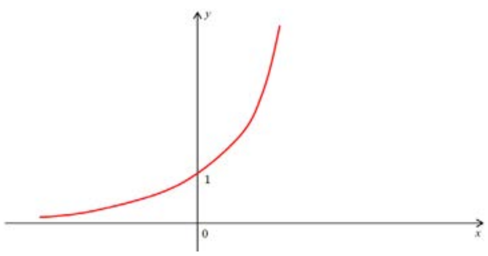


Figura 8.12: *Gráfico da função* f.

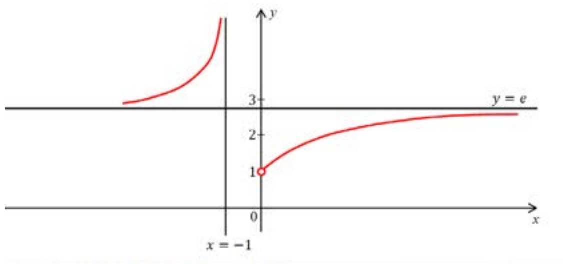


Figura 8.13: *Gráfico da função* g.

Funções do tipo $y = pe^{ax}$ aparecem em muitos modelos, como juros compostos, crescimento populacional, decaimento radioativo, variação de temperatura, etc. Dizemos que p é um valor inicial, a é uma taxa de crescimento e x é o tempo. Se o modelo for econômico, p é chamado de capital inicial, a é a taxa de juros e x é o tempo, que pode ser em horas, dias, anos, etc. Se o modelo for variação de temperatura, p é a temperatura inicial, a é a taxa de crescimento ou decaimento da temperatura, e x o tempo.

Essa função aparece como solução de alguns tipos de Equações Diferenciais Ordinárias, um ramo da Matemática que procura modelar esses fenômenos por meio de uma equação.

Exemplo 8.17 Calcule o rendimento de R\$200,00 numa poupança, com uma taxa de $3,4\%$ ao ano, em cinco anos.

Nesse caso, $p = 200$, $a = 3,4\%$, que podemos escrever como número racional $a = \dfrac{3,4}{100}$ ou sua representação decimal $a = 0,034$, e $x = 5$. Assim, $y = 200e^{(0,034)\cdot 5} = 200e^{0,17}$. Portanto, o valor de y (em reais) é, aproximadamente, $237,06$.

Observe que esse valor é muito próximo ao obtido no exemplo da Seção 8.4.2 e que a função $y = pe^{ax}$ se parece muito com o modelo econômico $S = 200(1,034)^n$, da mesma seção.

8.4.4 Logaritmo

Nesta seção, estudaremos o logaritmo, a função logarítmica e suas propriedades.

Definição 8.5 Sejam $a > 0$, $a \neq 1$, e $b > 0$ dois números reais. O número real x, tal que

$$a^x = b,$$

é chamado de *logaritmo de b na base a*, que indicamos por $\log_a b = x$. Assim,

$$\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.}$$

Exemplo 8.18 Temos:

a) $\log_2 4 = 2$, pois $2^2 = 4$;

b) $\log_2 \dfrac{1}{2} = -1$, pois $2^{-1} = \dfrac{1}{2}$;

c) $\log_5 1 = 0$, pois $5^0 = 1$.

Nota 8.10 Observe que $a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x \Leftrightarrow a^{\log_a b} = b$.

Proposição 8.11 Considere a, $b \in \mathbb{R}$, de modo que $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 1$. Então, são válidas as seguintes propriedades de logaritmo:

a) $\log_a(\alpha \cdot \beta) = \log_a \alpha + \log_a \beta$, para quaisquer α, $\beta \in \mathbb{R}$, com α, $\beta > 0$;

b) $\log_a \alpha^\beta = \beta \cdot \log_a \alpha$, para quaisquer α, $\beta \in \mathbb{R}$, com $\alpha > 0$;

c) $\log_a \dfrac{\alpha}{\beta} = \log_a \alpha - \log_a \beta$, para quaisquer α, $\beta \in \mathbb{R}$, com α, $\beta > 0$;

d) $\log_a \alpha = \dfrac{\log_b \alpha}{\log_b a}$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, com $\alpha > 0$ (Mudança da base a para a base b).

Demonstração: a) Temos: $x = \log_a \alpha \Leftrightarrow \alpha = a^x$ e $y = \log_a \beta \Leftrightarrow \beta = a^y$. Assim, $\alpha \cdot \beta = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, ou seja, $\alpha \cdot \beta = a^{x+y}$. Logo, $x + y = \log_a(\alpha \cdot \beta)$ e, portanto, $\log_a \alpha + \log_a \beta = \log_a(\alpha \cdot \beta)$.

b) Se $\beta = 0$, então a igualdade se verifica. Agora, sejam $x = \log_a \alpha^\beta$ e $y = \beta \cdot \log_a \alpha$, com $\beta \neq 0$. Segue-se que $a^x = \alpha^\beta$ e $\log_a \alpha = \dfrac{y}{\beta}$, ou seja, $a^x = \alpha^\beta$ e $a^{\frac{y}{\beta}} = \alpha$. Isso implica que $a^x = \alpha^\beta = \left(a^{\frac{y}{\beta}}\right)^\beta = a^y$. Como uma consequência, $x = y$ e, portanto, $\log_a \alpha^\beta = \beta \cdot \log_a \alpha$.

c) Considere $x = \log_a \dfrac{\alpha}{\beta}$, $y = \log_a \alpha$ e $z = \log_a \beta$. Isso implica que $a^x = \dfrac{\alpha}{\beta}$, $\alpha = a^y$ e $\beta = a^z$.

De onde $a^x = \dfrac{a^y}{a^z} = a^{y-z}$. Assim, $x = y - z$ e, portanto, $\log_a \dfrac{\alpha}{\beta} = \log_a \alpha - \log_a \beta$.

d) Considere $x = \log_a \alpha$, $y = \log_b \alpha$ e $z = \log_b a$. Isso implica que $a^x = \alpha$, $\alpha = b^y$ e $a = b^z$. Como $z \neq 0$, pois $a \neq 1$, observamos

$$a^x = b^y = (b^z)^{\frac{y}{z}} = a^{\frac{y}{z}}.$$

Portanto, $x = \dfrac{y}{z}$, ou seja, $\log_a \alpha = \dfrac{\log_b \alpha}{\log_b a}$.

Definição 8.6 Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Diz-se que $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_a x$ é uma *função logarítmica* na base a.

Nota 8.11 O domínio da função logarítmica é o conjunto $dom(f) = \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$.

Exemplo 8.19 O gráfico da função logarítmica $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_2 x$, está representado na Figura 8.14.

De forma análoga, consideramos a função logarítmica $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_{1/2} x$, cujo gráfico está representado na Figura 8.15.

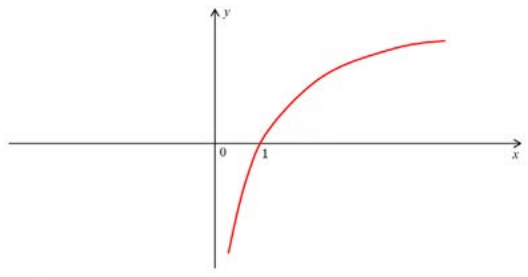


Figura 8.14: *Função logarítmica na base* 2.

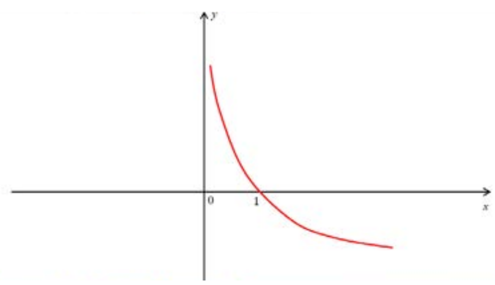


Figura 8.15: *Função logarítmica na base* $1/2$.

8.4.5 Logaritmo Natural

O logaritmo natural ocorre quando a base for o número de Euler e, que indicamos por ln, ou seja, $\ln = \log_e$. Nesse caso, temos as seguintes condições:

$$y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x \quad \text{e} \quad e^{\ln x} = x, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Exemplo 8.20 Determine o valor de $k \in \mathbb{R}$, tal que $e^{2k} = 4$.

Aplicando o logaritmo natural em ambos os membros da equação $e^{2k} = 4$, obtemos:

$$e^{2k} = 4 \Leftrightarrow \ln e^{2k} = \ln 4 \Leftrightarrow 2k \ln e = \ln 4.$$

Como $\ln e = 1$, segue-se que $2k = \ln 4$, ou seja, $k = \dfrac{\ln 4}{2}$.

8.4.6 As Inversas das Funções Logarítmicas, Exponenciais e Afim

Com base no Capítulo 2, Proposição 2.5, uma função será inversível se, e somente se, possuir inversa à direita e à esquerda.

Como exemplo, considere as funções: $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_2 x$; e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2^x$.

Note que

$$f(g(x)) = f(2^x) = \log_2 2^x = x, \forall\, x \in \mathbb{R} = Im(f).$$

Logo, a função g é uma inversa à direita de f e, portanto, f é sobrejetiva. Além disso,

$$g(f(x)) = g(\log_2 x) = 2^{\log_2 x} = x, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^* = dom(f).$$

Assim, a função g é uma inversa à direita de f e, portanto, f é injetiva. Como f é injetiva e sobrejetiva, concluímos que f é bijetiva, sendo g a sua inversa. Os gráficos das funções f e g estão representados na Figura 8.16.

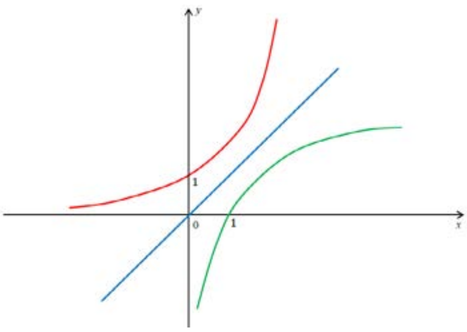


Figura 8.16: *f e g na base* 2.

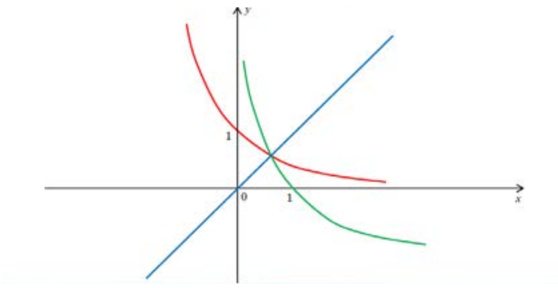


Figura 8.17: *f e g na base* $1/2$.

Geometricamente, o gráfico da função f é simétrico ao gráfico da sua inversa g em relação à reta de equação $y = x$. Essa reta é chamada de *eixo de simetria*, devido a esse comportamento geométrico.

De forma análoga, a inversa da função f, definida por $f(x) = \log_{1/2} x$, é a função g, dada por $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, e vice-versa, cujos gráficos estão representados na Figura 8.17.

Exemplo 8.21 Considere a função afim $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x+1$, e sua inversa $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $g(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}$, cujos gráficos estão representados na Figura 8.18.

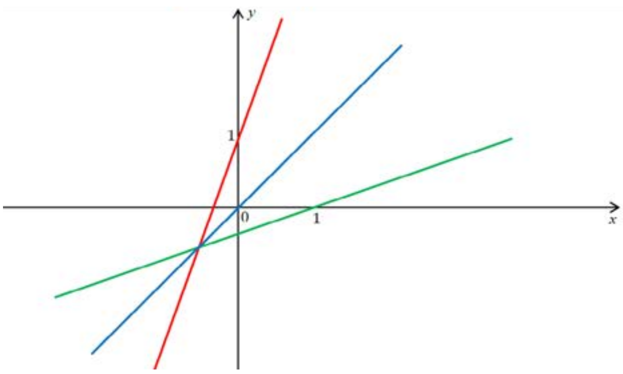


Figura 8.18: *Gráficos da função f, dada por $f(x) = 2x+1$, e da sua inversa g, dada por $g(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}$.*

8.5 Funções Trigonométricas

Primeiramente, vamos definir as funções trigonométricas para um ângulo agudo. Posteriormente, esses conceitos serão estendidos para um ângulo qualquer, conforme apresentado em [20].

8.5.1 As Funções Trigonométricas do Ângulo Agudo

Consideremos um ângulo $\widehat{AOB} = \theta$, com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, e tracemos a partir dos pontos A_1, A_2, A_3, etc. da semirreta OA, perpendiculares A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, etc. à semirreta OB. Os triângulos OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3, etc, são semelhantes por terem os mesmos ângulos (Figura 8.19).

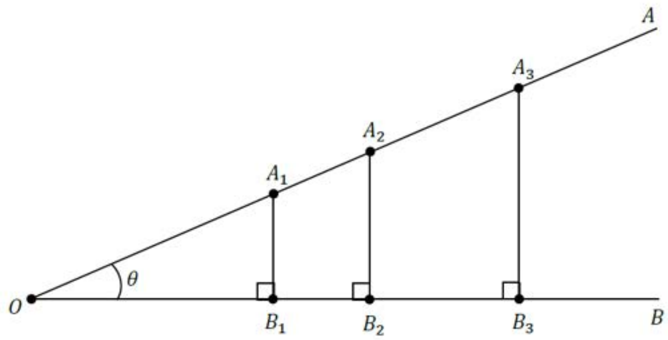


Figura 8.19: *Triângulos retângulos semelhantes definidos a partir do ângulo θ*

Nessas condições, as relações entre lados correspondentes não dependem dos comprimentos envolvidos, mas apenas do ângulo θ. Essas relações, conhecidas como *relações trigonométricas* no triângulo retângulo, permitem definir, para $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, as funções

$$\begin{cases} sen(\theta) = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \dfrac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \dots \\ \\ cos(\theta) = \dfrac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \dfrac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \dfrac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = \dots, \end{cases}$$

em que $\overline{AB}$ indica a medida do segmento AB. Essas funções de θ, denominadas *seno* e *cosseno*, respectivamente, são chamadas *funções trigonométricas* e não são independentes. A relação seguinte aparece naturalmente:

$$cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1 \tag{8.1}$$

Com efeito, considere um ângulo θ de vértice O e um triângulo OAB, retângulo em A (Figura 8.20). Usando os conceitos de seno e de cosseno, e aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos

$$cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = \left(\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}\right)^2 + \left(\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}}\right)^2 = \dfrac{(\overline{OA})^2 + (\overline{AB})^2}{(\overline{OB})^2} = \dfrac{(\overline{OB})^2}{(\overline{OB})^2} = 1$$

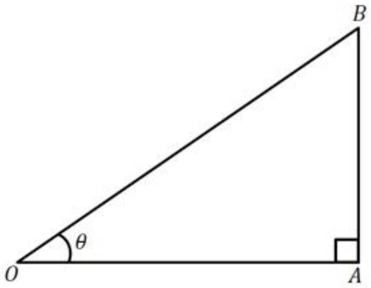


Figura 8.20: *Triângulo OAB, retângulo em A*

8.5.2 Extensões dos Conceitos das Funções Trigonométricas

Os conceitos das funções trigonométricas *seno* e *cosseno*, até então, definidos para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, serão estendidos de modo que $sen(x)$ e $cos(x)$ possam ser definidos para todos os números $x \in \mathbb{R}$ e que seja mantida a relação básica, dada por $cos^2(x) + sen^2(x) = 1$. Para isto, consideremos em $\mathbb{R}^2$ o círculo unitário, ou círculo trigonométrico, dado por

$$S^1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1\}.$$

O círculo pode ser percorrido em dois sentidos. Quando um deles é escolhido e denominado positivo, dizemos que o círculo está *orientado*. Tradicionalmente, escolhemos o sentido anti-horário e fixamos no círculo unitário orientado um ponto A, chamado *origem dos arcos* (Figura 8.21).

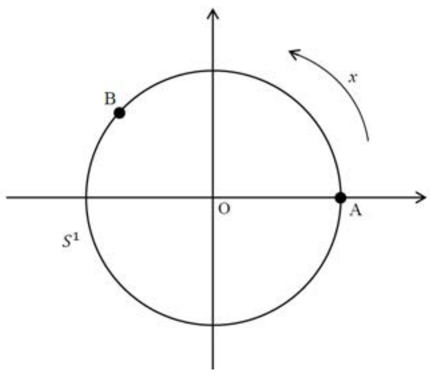


Figura 8.21: *Círculo unitário orientado*

Definimos a *medida algébrica* de um arco AB deste círculo como sendo o comprimento desse arco, associado a um sinal positivo se o sentido de A para B for anti-horário; e negativo, em caso contrário. Essa medida será denotada por $m(AB)$, com $-2\pi < m(AB) < 2\pi$. Agora, fixado um ponto $A \in S^1$, considere a função $E : \mathbb{R} \to S^1$, que associa cada $x \in \mathbb{R}$ a um ponto de $P \in S^1$, do seguinte modo

$$E(x) = \begin{cases} P \in S^1, \;\; tal\ que \;\; m(AP) = x, & se \; -2\pi < x < 2\pi; \\ P \in S^1, \;\; tal\ que \;\; m(AP) = (x - 2k\pi), & se \;\; 2k\pi \leq x < 2(k+1)\pi, \; com\ k \in \mathbb{N}; \\ P \in S^1, \;\; tal\ que \;\; m(AP) = (x + 2k\pi), & se \; -2(k+1)\pi < x \leq -2k\pi, \; com\ k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{8.2}$$

Exemplo 8.22 Por exemplo, temos

a) $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = P \in S^1$ tal que $m(AP) = \frac{\pi}{2}$;

b) $E\left(\frac{5\pi}{2}\right) = P \in S^1$ tal que $m(AP) = \frac{5\pi}{2} - 2\pi = \frac{\pi}{2}$;

c) $E\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = P \in S^1$ tal que $m(AP) = -\frac{5\pi}{2} + 2\pi = -\frac{\pi}{2}$.

Note que, se $x \geq 2k\pi$ ou $x \leq -2k\pi$, com $k \in \mathbb{N}$, o círculo S^1 terá sido percorrido um número k de vezes, a partir de A até P. Então, $E(x)$ retorna o ponto P de parada, independentemente do número de voltas dadas. Por outro lado, dado um ponto $P \in S^1$, ele é a imagem pela função E, de uma infinidade de números reais (Figura 8.22), todos eles da forma

$$x + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad 0 \leq x < 2\pi.$$

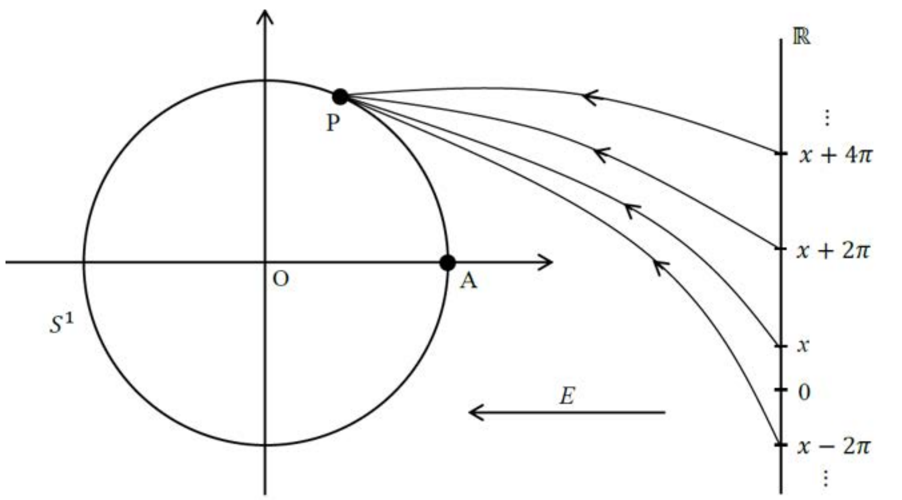


Figura 8.22: *Exemplo de* $P = E(x) = E(x + 2k\pi)$

Definição 8.7 No sistema de coordenadas cuja origem é o centro de S^1, considere o ponto $A = (1,0)$ e a função E, dada pela Equação 8.2. Para cada $x \in \mathbb{R}$, as coordenadas de $P = (P_a, P_b) \in S^1$, tal que $E(x) = P$, serão, por definição, chamadas *cosseno* de x e *seno* de x, indicadas por $cos(x) = P_a$ e $sen(x) = P_b$, respectivamente. Assim, temos as funções $cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $sen : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

i) $cos(x) = P_a$, onde $E(x) = (P_a, P_b)$;

ii) $sen(x) = P_b$, onde $E(x) = (P_a, P_b)$.

Por definição, $E(x)$ é um ponto de $P \in S^1$, como indicado na Figura 8.23.

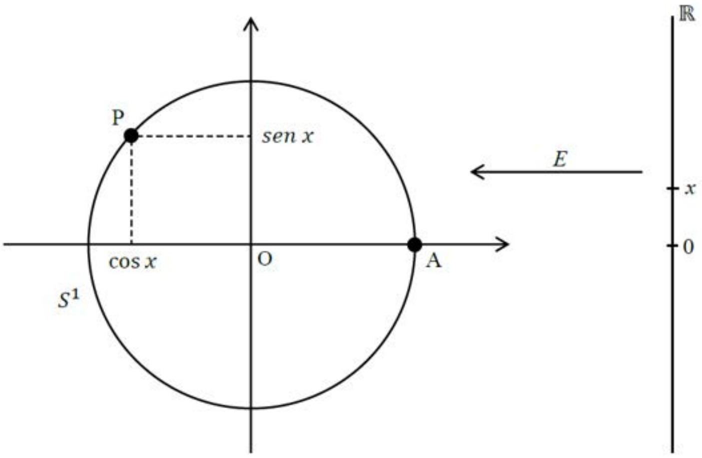


Figura 8.23: *A função E associa a $x \in \mathbb{R}$ um $P \in S^1$ tal que $m(AP) = x$.*

Observe que esta definição coincide com a anterior, quando $0 < x < \frac{\pi}{2}$. De fato, com base na Figura 8.24, percebemos que

$$cos(x) = \frac{P_a}{1} = P_a \qquad \text{e} \qquad sen(x) = \frac{P_b}{1} = P_b.$$

Além disso, ela permite escrever $E(x) = P = (cos(x), sen(x))$ para x fora desse intervalo.

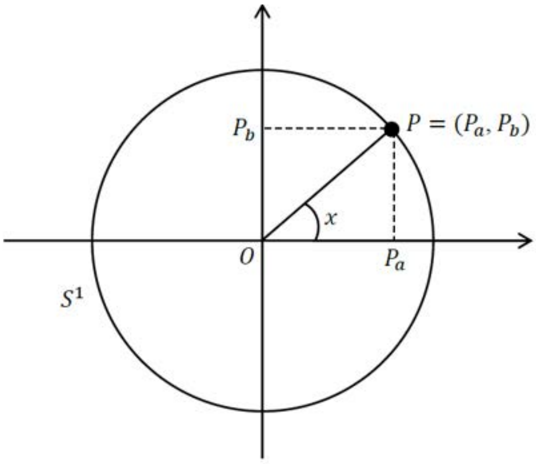


Figura 8.24: *As definições de $cos(x)$ e $sen(x)$ dadas em i) e ii) coincidem com as definições da Seção 8.5.1*

O Exemplo seguinte ilustra alguns casos de como as funções trigonométricas são dadas em termos de coordenadas de pontos no círculo unitário.

Exemplo 8.23 Alguns casos da função E:

i) $E(0) = (cos(0), sen(0)) = (1, 0)$;

ii) $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(cos\left(\frac{\pi}{2}\right), sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0, 1)$;

iii) $E(\pi) = (cos(\pi), sen(\pi)) = (-1, 0)$;

iv) $E\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \left(cos\left(\frac{3\pi}{2}\right), sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = (0,-1)$;

v) $E(2\pi) = (cos(2\pi), sen(2\pi)) = (1,0)$.

Como todo ponto $P = (cos(x), sen(x))$ de S^1 está a uma distância 1 da origem, a relação dada pela Equação 8.1 continua válida, ou seja,

$$cos^2(x) + sen^2(x) = 1.$$

A nova definição, portanto, estende a primeira e mantém as relações básicas. Naturalmente, para qualquer número inteiro k, e para todo número real x, $sen(x+2k\pi) = sen(x)$ e $cos(x+2k\pi) = cos(x)$, pois $E(x+2k\pi) = E(x)$, pela definição. Esse fato significa que as funções *seno* e *cosseno* são periódicas com período 2π, ou seja, se conhecemos o comportamento dessas funções no intervalo real $[0,2\pi]$, passamos a conhecer imediatamente como essas funções se comportam em todos os intervalos seguintes, ou anteriores, de comprimento 2π. Isso significa que o gráfico da função f, definida por $f(x) = sen(x)$ no intervalo $[0,2\pi]$, é exatamente o mesmo em qualquer intervalo da forma $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$, para $k \in \mathbb{Z}$. Logo, podemos restringir o estudo dessas funções ao intervalo $[0,2\pi]$, que corresponde ao estudo das coordenadas dos pontos alcançados com exatamente uma volta no círculo trigonométrico.

Proposição 8.12 Para todo $x \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:

i) $-1 \leq sen(x) \leq 1$;
ii) $-1 \leq cos(x) \leq 1$;
iii) $sen(-x) = -sen(x)$;
iv) $cos(-x) = cos(x)$.

Demonstração: Exercício.

Além das propriedades dadas na Proposição 8.12, diversas outras propriedades serão deduzidas como uma consequência da proposição seguinte.

Proposição 8.13 Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, vale

$$cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sen(a)sen(b).$$

Demonstração: Considere, no círculo trigonométrico, S^1, os pontos P e Q de modo que $E(a) = P$ e $E(b) = Q$ (Figura 8.25). Assim, temos que $P = (cos(a), sen(a))$ e $Q = (cos(b), sen(b))$. A distância d entre P e Q é dada por

$$d = \sqrt{(cos(a)-cos(b))^2 + (sen(a)-sen(b))^2}$$
$$d^2 = cos^2(a) - 2cos(a)cos(b) + cos^2(b) + sen^2(a) - 2sen(a)sen(b) + sen^2(b)$$
$$d^2 = 2 - 2\,(cos(a)cos(b) + sen(a)sen(b))$$

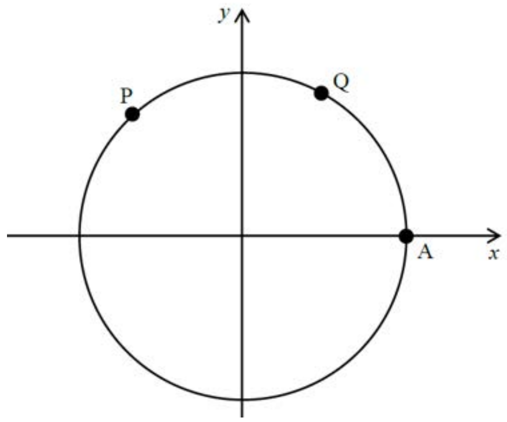


Figura 8.25: *Cosseno da diferença entre dois ângulos*

Por outro lado, mudando o sistema de coordenadas, girando os eixos de um ângulo b em torno da origem (Figura 8.26), observamos que nesse novo sistema o ponto Q tem coordenadas $Q = (1,0)$ e o ponto $P = (cos(a-b), sen(a-b))$. Calculando outra vez a distância entre P e Q, deduzimos que

$$d^2 = (1-cos(a-b))^2 + (0-sen(a-b))^2$$
$$d^2 = 2-2cos(a-b).$$

Igualando os valores de d^2, chegamos a

$$cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sen(a)sen(b).$$

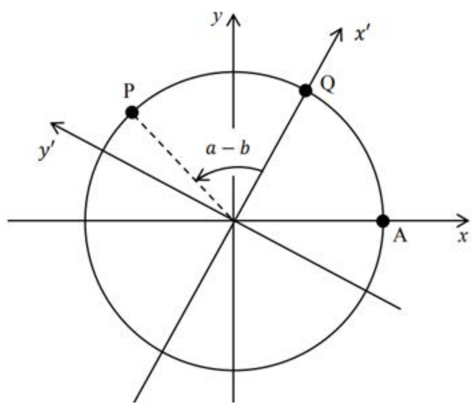


Figura 8.26: *Mudança do sistema de coordenadas girando os eixos de um ângulo b em torno da origem*

Outras fórmulas são obtidas da que acabamos de demonstrar, como veremos no próximo resultado.

Proposição 8.14 Como consequência da última proposição, temos, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, as seguintes identidades trigonométricas:

i) $cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)$;
ii) $sen(a+b) = sen(a)cos(b) + sen(b)cos(a)$;

iii) $sen(a-b) = sen(a)cos(b) - sen(b)cos(a)$;
iv) $sen(a+\frac{\pi}{2}) = cos(a)$;
v) $cos(a+\frac{\pi}{2}) = -sen(a)$;
vi) $sen(2a) = 2sen(a)cos(a)$;
vii) $cos(2a) = 1-2sen^2(a)$, isto é, $sen^2(a) = \dfrac{1-cos(2a)}{2}$.

Demonstração:

i) Trocando b por $-b$ na Proposição 8.13 e usando a Proposição 8.12, obtemos
$cos(a+b) = cos(a)cos(-b) + sen(a)sen(-b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)$.

ii) Como, para todo $x \in \mathbb{R}$, $sen(x) = cos(\frac{\pi}{2} - x)$, percebemos que
$sen(a+b) = cos(\frac{\pi}{2} - (a+b))$
$= cos((\frac{\pi}{2} - a) - b)$
$= cos(\frac{\pi}{2} - a)cos(b) + sen(\frac{\pi}{2} - a)sen(b)$
$= cos(\frac{\pi}{2} - a)cos(b) + cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - a))sen(b)$
$= sen(a)cos(b) + cos(a)sen(b)$.

iii) Trocando b por $-b$ no item ii), temos
$sen(a-b) = sen(a)cos(b) - sen(b)cos(a)$.

iv) Exercício.
v) Exercício.
vi) Exercício.
vii) Exercício.

8.5.3 Funções Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante

A partir das funções seno e cosseno, definem-se as funções tangente (tg), cotangente (ctg), secante (sec) e cossecante (csc) da seguinte forma

a) $tg(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$, se $cos(x) \neq 0$;
b) $ctg(x) = \dfrac{cos(x)}{sen(x)}$, se $sen(x) \neq 0$;
c) $sec(x) = \dfrac{1}{cos(x)}$, se $cos(x) \neq 0$;
d) $csc(x) = \dfrac{1}{sen(x)}$, se $sen(x) \neq 0$.

Assim como nas funções seno e cosseno, os valores que cada uma das demais funções trigonométricas assumem, para determinado ângulo x, podem ser associados a segmentos no ciclo trigonométrico, conforme ilustrado na Figura 8.27. Fixado o ângulo x, pode-se mostrar que:

a) $tg(x) = \overline{AT}$
a) $ctg(x) = \overline{QS}$
a) $sec(x) = \overline{OT}$
a) $csc(x) = \overline{OS}$

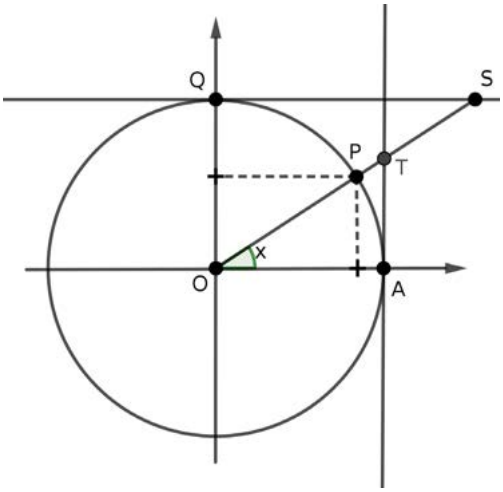


Figura 8.27: *Círculo trigonométrico e sistema de coordenadas com origem no centro do círculo.*

Diferentemente das funções seno e cosseno, as demais funções trigonométricas não são definidas para todo x real. Por exemplo, a função tangente não é definida para x tal que $cos(x) = 0$. A Tabela 8.5.1 resume o domínio, imagem, período e gráfico de cada uma das funções trigonométricas.

8.5.4 Funções Trigonométricas Inversas

Vimos, no Capítulo 2, que uma função deve ser bijetiva para ser inversível. As funções trigonométricas, por serem periódicas, não são injetiva. De fato, por exemplo, temos $sen(x) = sen(x+2\pi)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O mesmo acontece com todas as funções trigonométricas. Porém, restringindo-se o domínio a um intervalo onde imagens não se repetem, obtemos uma restrição injetiva para cada função trigonométrica. A partir dessa restrição, definem-se as inversas para as respectivas funções trigonométricas, que recebem os nomes de $arcsen, arccos, arctg, arccot, arcsec, arccsc$, conforme abaixo:

a) $arcsen : [-1,\ 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, com $arcsen(y) = x$ tal que $sen(x) = y$;
b) $arccos : [-1,\ 1] \to [0,\ \pi]$, com $arccos(y) = x$ tal que $cos(x) = y$;
c) $arctg : (-\infty,\ \infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, com $arctg(y) = x$ tal que $tg(x) = y$;
d) $arccot : (-\infty, \infty) \to (0,\ \pi)$, com $arccot(y) = x$ tal que $cot(x) = y$;
e) $arcsec : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$, com $arcsec(y) = x$ tal que $sec(x) = y$;
f) $arccsc : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$, com $arccsc(y) = x$ tal que $csc(x) = y$.

Exemplo 8.24 Como exemplo, temos as seguintes relações entre as funções trigonométricas e suas respectivas inversas:

a) $sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

b) $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

c) $tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad arctg(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

Exemplo 8.25 Por serem inversas umas das outras, a composição de funções trigonométricas com suas inversas levam a identidades. Por exemplo, $sen(arcsen(y)) = y$ e $arccos(cos(x)) = x$.

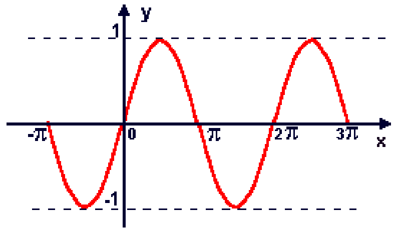
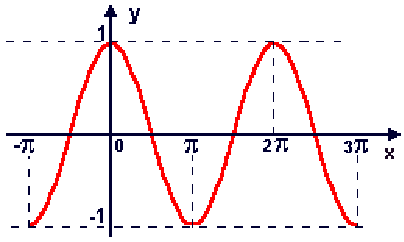
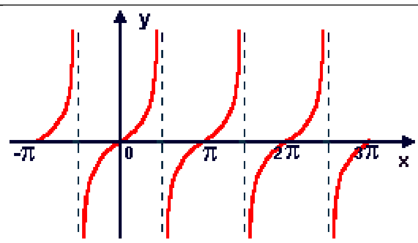
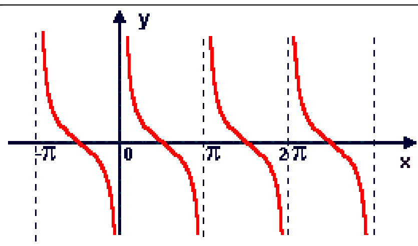
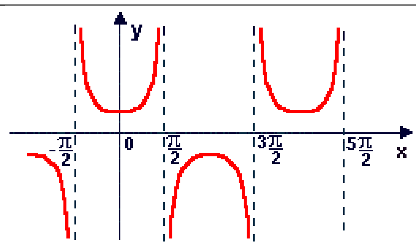
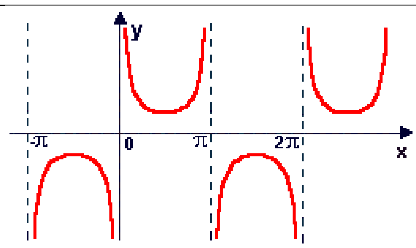
Função	Domínio	Imagem	Período	Gráfico
Sen	$\mathbb{R}$	$[-1,\ 1]$	2π	
Cos	$\mathbb{R}$	$[-1,\ 1]$	2π	
Tg	$\{x \in \mathbb{R};$ $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}\}$	$\mathbb{R}$	π	
Cot	$\{x \in \mathbb{R}; x \neq k\pi\}$	$\mathbb{R}$	π	
Sec	$\{x \in \mathbb{R};$ $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}\}$	$\{x \in \mathbb{R}; \lvert x\rvert > 1\}$	2π	
Csc	$\{x \in \mathbb{R}; x \neq k\pi\}$	$\{x \in \mathbb{R}; \lvert x\rvert > 1\}$	2π	

Tabela 8.5.1: *Resumo das funções trigonométricas*

Bibliografia

[1] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. (Projeto Euclides, v. 1).

[2] EVARISTO, J.; PERDIGAO, E. *Introdução à Álgebra Abstrata*. Maceió: Edufal, 2002.

[3] DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. *Álgebra Moderna*. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.

[4] MENDELSON, E. *Introduction to Mathematical Logic*. 4. ed. New York: Chapman & Hall, 1997.

[5] VELLEMAN, D. J. *How to Prove It: A Structured Approach*. New York: Cambridge University Press, 2006.

[6] BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

[7] IFRAD, G. *Os números:* História de uma Grande Invenção. 3. ed. São Paulo: Globo, 1958.

[8] LIMA, E. L. Zero é um número natural? *Revista do Professor de Matemática (RPM)*, SBM, v. 01, n. 76, p. 8–11, 2011.

[9] ADLER, I. *Iniciação à Matemática de hoje;* tradução de Augusto Cesar de Oliveira Morgado. 3. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1972.

[10] FERREIRA, J. *A Construção dos Números*. Rio de Janeiro: SBM, 2011. (Coleção Textos Universitários).

[11] ALVARES, E. R. O comprimento do período de dizimas. *RPM*, SBM, v. 01, n. 61, p. 17–24, 2006.

[12] LIMA, E. L. Voltando a falar sobre dízimas. *RPM*, SBM, v. 01, n. 10, p. 23–28, 1987.

[13] IFRAH, G. *História universal dos algarismos:* a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995.

[14] OLIVEIRA, A. F. Continuidade e números irracionais de richard dedekind. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, SPM, v. 41, p. 97–119, 1999.

[15] AVILA, G. *Variáveis Complexas e Aplicações*. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[16] CHURCHILL, R. V. *Variáveis Complexas e suas Aplicações;* tradução de Tadao Yoshida. São Paulo: McGraw-Hill, 1975.

[17] LIMA, E. L. *A Matemática do Ensino Médio*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

[18] GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*. 5. ed. [S.l.]: LTC, Vol. 1, 2013.

[19] THOMAS, G. B. *Cálculo*. 11. ed. [S.l.]: Addison Wesley, Vol. 1, 2009.

[20] MORGADO, A. C.; CARMO, M. P. do; WAGNER, E. *Trigonometria e Números Complexos*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1999. (Coleção do Professor de Matemática, v. 6).